

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 28/3/14

1. Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Dimostrare:

- (a) $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ è misurabile se e solo se $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sono misurabili;
- (b) $f : X \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ è misurabile $\Leftrightarrow \{f > a\} \in \mathfrak{M}$ per ogni $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{f \geq a\} \in \mathfrak{M}$ per ogni $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{f < a\} \in \mathfrak{M}$ per ogni $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{f \leq a\} \in \mathfrak{M}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;
- (c) se $f : X \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ è misurabile anche $|f|$ lo è;
- (d) se $f_n : X \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\sup_n f_n, \inf_n f_n$ sono misurabili;
- (e) se $f_n : X \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $E := \{x \in X : \exists f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)\} \in \mathfrak{M}$ e $f : E \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ è misurabile (rispetto alla σ -algebra $\mathfrak{M}_E := \{F \cap E : F \in \mathfrak{M}\}$ su E).

2. Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura, e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ misurabile. Dimostrare:

- (a) se $f \geq 0$ e $\int_X f d\mu = 0$ allora $f = 0$ q.o.;
- (b) se $f \in L^1(X, \mu)$ e $\int_E f d\mu = 0$ per ogni $E \in \mathfrak{M}$, allora $f = 0$ q.o.;
- (c) se $\int_X |f| d\mu < +\infty$, allora $|f| < +\infty$ q.o.

3. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione, e si definiscano

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n := \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} a_n, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n := \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq k} a_n.$$

Si dimostri:

- (a) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$;
- (b) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = l'$ (resp. $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = l''$) se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \begin{cases} \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow & a_n > l' - \varepsilon \text{ (resp. } a_n < l'' + \varepsilon), \\ \forall \bar{n} \in \mathbb{N} \exists n \geq \bar{n} : & a_n < l' + \varepsilon \text{ (resp. } a_n > l'' - \varepsilon). \end{cases}$$

- (c) $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$ se e solo se

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = l.$$