

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 25/3/14

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Sia X uno spazio topologico. La famiglia di sottoinsiemi di X

$$\mathcal{B}(X) := \bigcap \{ \mathfrak{M} : \mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X) \text{ } \sigma\text{-algebra t.c. } A \in \mathfrak{M} \forall A \subset X \text{ aperto} \}$$

è la più piccola σ -algebra su X che contiene tutti gli insiemi aperti.

2. Sia $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una numerazione dei razionali in $(0, 1)$ e, dato $\varepsilon > 0$, si considerino gli insiemi

$$A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) \cap (0, 1)$$

e $K = [0, 1] \setminus A$. Dimostrare:

- (a) A, K sono Lebesgue-misurabili e $m(A) \leq \varepsilon$, $m(K) \geq 1 - \varepsilon$;
- (b) A è denso in $(0, 1)$ e K ha interno vuoto;
- *(c) K non è PJ-misurabile (sugg.: si ha $m_e(K) \geq 1 - \varepsilon$: se così non fosse, si potrebbe trovare un plurintervallo aperto $E \subset \mathbb{R}$ tale che $K \subset E$ e $m(E) < 1 - \varepsilon$, ma allora $[0, 1] \setminus E \subset A \dots$)