

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 21/3/14

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Sia (X, d) metrico. Verificare che $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$ per ogni $x, y, z \in X$.
2. Siano (X, d) uno spazio metrico completo e $C \subset X$ chiuso. Mostrare che, indicando con d_C la restrizione di d a $C \times C$ (detta la *metrica indotta* da d su C), (C, d_C) è uno spazio metrico completo.
- *3. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare:

- (a) la relazione definita sull'insieme delle successioni di Cauchy di X da

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

è di equivalenza;

- (b) indicata con $[(x_n)]$ la classe di equivalenza della successione di Cauchy $(x_n) \subset X$ secondo la relazione del punto (a), e con $\bar{X}$ l'insieme delle classi di equivalenza, l'applicazione $\bar{d} : \bar{X} \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$\bar{d}([(x_n)], [(y_n)]) := \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n), \quad [(x_n)], [(y_n)] \in \bar{X},$$

è ben definita, cioè il limite esiste e non dipende dai rappresentanti scelti per le classi, ed è una metrica su $\bar{X}$ (sugg.: per l'esistenza del limite, usare l'esercizio 3);

- (c) indicata, per ogni $x \in X$, con $j(x) \in \bar{X}$ la classe di equivalenza della successione costante $x_n = x$, $n \in \mathbb{N}$, l'applicazione $j : X \rightarrow \bar{X}$ così definita è isometrica e $j(X)$ è denso in $\bar{X}$;
- (d) $(\bar{X}, \bar{d})$ è uno spazio metrico completo, detto il *completamento* di (X, d) (sugg.: sia $(\bar{x}_n) \subset \bar{X}$ di Cauchy, e sia $(x_n) \subset X$ tale che $\bar{d}(j(x_n), \bar{x}_n) < 1/n \dots$);
- (e) se $(\bar{X}, \bar{d})$ è uno spazio metrico completo e $k : X \rightarrow \bar{X}$ è un'isometria con $k(X)$ denso in $\bar{X}$, esiste un'isometria suriettiva $\phi : \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ tale che $\phi(j(x)) = k(x)$ per ogni $x \in X$ (*unicità del completamento*) (sugg.: si definisca prima $\phi : j(X) \rightarrow k(X)$ ponendo $\phi(j(x)) := k(x)$, allora ϕ è isometrica, poi $j(X)$ è denso in $\bar{X}$ e quindi...);
- (f) sia $(X, \|\cdot\|)$ normato, e sul suo completamento $(\bar{X}, \bar{d})$ (considerando X come spazio metrico con la metrica indotta dalla norma), si ponga

$$\bar{x} + \bar{y} := \lim_{n \rightarrow +\infty} j(x_n + y_n),$$

$$\alpha \bar{x} := \lim_{n \rightarrow +\infty} j(\alpha x_n), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \bar{x}, \bar{y} \in \bar{X};$$

$$\|\bar{x}\|^- := \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|,$$

dove $(x_n), (y_n) \subset X$ sono tali che $j(x_n) \rightarrow \bar{x}$, $j(y_n) \rightarrow \bar{y}$; allora le operazioni di spazio vettoriale e la norma su $\bar{X}$ sono ben definite, $j : X \rightarrow \bar{X}$ è lineare, e $(\bar{X}, \|\cdot\|^-)$ è uno spazio di Banach la cui norma $\|\cdot\|^-$ è indotta da $\bar{d}$.

(Nota: i punti (a)-(d) forniscono una dimostrazione alternativa, rispetto a quella data a lezione, dell'esistenza del completamento, mentre i punti (e), (f) danno la dimostrazione dell'unicità del completamento e la sua versione per spazi normati, solo accennate a lezione.)

4. Siano X uno spazio normato e $V \subset X$ un sottospazio finito dimensionale. Verificare che V è chiuso.
5. Sia $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ un net in uno spazio topologico X . Un $x \in X$ è un *punto limite* per (x_α) se per ogni intorno U di x ed ogni $\alpha \in I$ esiste $\alpha' \geq \alpha$ tale che $x_{\alpha'} \in U$. Dimostrare:

- (a) se esiste un sottonet $(y_\beta)_{\beta \in J}$ di (x_α) convergente a $x \in X$, allora x è un punto limite per (x_α) ;
- (b) se $x \in X$ è un punto limite di (x_α) , allora definendo un ordine parziale diretto su $J := \mathcal{I}_x \times I$ tramite

$$(U', \alpha') \geq (U, \alpha) \Leftrightarrow U' \subset U, \alpha' \geq \alpha,$$

e definendo $f : J \rightarrow I$ tramite $f(U, \alpha) := \alpha'$, dove $\alpha' \in I$ è tale che $\alpha' \geq \alpha$ e $x_{\alpha'} \in U$, si ha che $(x_{f(\beta)})_{\beta \in J}$ è un sottonet di (x_α) convergente a x .

In sostanza: (x_α) ammette un sottonet convergente a x se e solo se x è un suo punto limite.

6. Siano X, Y spazi topologici con X compatto, e $f : X \rightarrow Y$ continua. Mostrare che allora $f(X)$ è compatto in Y (con la topologia relativa).
7. Sia X compatto e $C \subset X$ chiuso. Mostrare che allora C è compatto (con la topologia relativa).
8. Sia X spazio di Hausdorff e $K \subset X$ compatto. Mostrare che allora K è chiuso.
9. Siano X compatto, Y di Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ continua e biunivoca. Mostrare che allora $f^{-1} : Y \rightarrow X$ è continua.
10. Sia X spazio normato di dimensione infinita, e $K \subset X$ compatto. Mostrare che K ha interno vuoto.