

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 11/3/14

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Siano X, Y spazi metrici, $D \subset X$, x_0 punto di accumulazione per D e $f : D \rightarrow Y$. Verificare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se e solo se per ogni successione $(x_n) \subset D \setminus \{x_0\}$ tale che $x_n \rightarrow x_0$, si ha $f(x_n) \rightarrow \ell$.
2. Siano X, Y, Z spazi topologici, e $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ funzioni. Mostrare che se f è continua in $x_0 \in X$ e g è continua in $f(x_0) \in Y$ allora $g \circ f : X \rightarrow Z$ è continua in x_0 .
3. Siano X, Y spazi topologici e $f : X \rightarrow Y$ funzione. Verificare che f è continua in X se e solo se per ogni chiuso $C \subset Y$, $f^{-1}(C)$ è un chiuso di X .
- *4. Su $X = [0, 1]$ si definisca una topologia dichiarando che $C \subset [0, 1]$ è chiuso se e solo se è al più numerabile, o $C = X$. Dimostrare che $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, se si dota l'immagine \mathbb{R} della topologia usuale, se e solo se è costante.
5. Sia $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, con \mathbb{C}^n dotato della norma euclidea, e si indichi con $\sigma(T)$ lo spettro di T . Dimostrare:
 - (a) se $T = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ è diagonale, allora $\|T\| = \max_j |\lambda_j|$;
 - (b) se T è hermitiana ($T^* = T$), allora $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ (sugg.: se T è hermitiana, $T = UDU^*$ con D diagonale e $U^*U = UU^* = 1$);
 - (c) per T generica, $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T^*T)} |\lambda|^{1/2}$.
6. Siano $X = C^1([a, b])$, $Y = C^0([a, b])$ e $D : X \rightarrow Y$ definito da $Df := f'$. Mostrare che:
 - (a) ponendo
$$\|f\|_{(1)} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad f \in C^1([a, b]),$$
si definisce una norma su X ;
 - (b) se su X si mette la norma $\|\cdot\|_{(1)}$ e su Y la norma $\|\cdot\|_\infty$, D è limitato e $\|D\| = 1$ (sugg.: considerare le funzioni $f(t) = e^{\alpha t}$ e fare $\alpha \rightarrow +\infty$);
 - (c) se si mette la norma $\|\cdot\|_\infty$ sia su X che su Y , D non è limitato (sugg.: considerare le funzioni $f_n(t) := \frac{\sin nt}{n}$).