Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2013-14

G. Morsella

Esercizi del 7/3/14

1. Verificare che la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$
$$\tau_\iota := \{(a, +\infty) \,:\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$
definisce una topologia su $\mathbb{R}$ che non è di Hausdorff.

2. Siano (X, d) uno spazio metrico, $x \in X$ e $B \subset X$. Mostrare che x è un punto di accumulazione per B se e solo se esiste una successione $(x_j) \subset B \setminus \{x\}$ tale che $x_j \to x$.

3. Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e Δ l'insieme delle decomposizioni di $[a, b]$:
$$\delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Si definisca su Δ una relazione $\leq$ dicendo che $\delta_1 \leq \delta_2$ se $\delta_1 \subset \delta_2$ (cioè δ_2 è ottenuta da δ_1 aggiungendo dei punti). Data inoltre $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, si ponga
$$\sigma_\delta := \sum_{k=1}^{n} \Big(\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \Big)(x_k - x_{k-1}), \qquad \Sigma_\delta := \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \Big)(x_k - x_{k-1}).$$
Dimostrare che:
   (a) $(\Delta, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato diretto;
   (b) il net $(\sigma_\delta)_{\delta \in \Delta} \subset \mathbb{R}$ (risp. $(\Sigma_\delta)_{\delta \in \Delta}$) è non decrescente (risp. non crescente), cioè se $\delta_1 \leq \delta_2$ allora $\sigma_{\delta_1} \leq \sigma_{\delta_2}$ (risp. $\Sigma_{\delta_1} \geq \Sigma_{\delta_2}$);
   (c) f è integrabile secondo Riemann se e solo se $\lim_\delta \sigma_\delta = \lim_\delta \Sigma_\delta = \int_a^b f$ nel senso dei net in $\mathbb{R}$ (con la topologia usuale). (Sugg.: f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che $\Sigma_\delta - \sigma_\delta < \varepsilon$.)

4. Siano (X, d) uno spazio metrico e $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ un net. Verificare che sono equivalenti
   (a) $x_\alpha \to x$;
   (b) $d(x_\alpha, x) \to 0$ come net in $\mathbb{R}$ (con la topologia usuale);
   (c) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\alpha_\varepsilon \in I$ tale che se $\alpha \geq \alpha_\varepsilon$ allora $d(x_\alpha, x) < \varepsilon$.

   In particolare, se $I = \mathbb{N}$ si ritrova la nozione di convergenza di una successione in uno spazio metrico.