Esercitazioni del corso di Analisi II
CdL in Ingegneria Meccanica e Energetica
a.a. 2012-13

G. Morsella

7/11/2012

1. Si consideri la funzione $f(x,y) = xy^2 + y + \sin(xy) + 3(e^x - 1)$.

   (a) Verificare che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente, in un intorno di $(x,y) = (0,0)$, una funzione $y = g(x)$.

   (b) Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)+3x}{x}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)+3x}{x^2}$.

   Soluzione. (a) Si ha $f_y(x,y) = 2xy + 1 + x\cos(xy)$ e dunque $f(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 1 \neq 0$, per cui il teorema della funzione implicita è applicabile nel punto $(0,0)$ e fornisce l'esistenza della funzione g cercata.

   (b) Notiamo che essendo f di classe C^∞ anche g lo è; in particolare, esistono $g'(0)$ e $g''(0)$ (finite). Poiché $g(0) = 0$ il primo limite richiesto è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per cui la regola di de L'Hopital dà:
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)+3x}{x} = \lim_{x\to 0} g'(x) + 3 = g'(0) + 3,$$
   e, essendo $f_x(x,y) = y^2 + y\cos(xy) + 3e^x$, dal teorema della funzione implicita si ha
$$g'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = -3,$$
   per cui il limite cercato vale zero. Per calcolare il secondo limite applichiamo ancora de L'Hopital:
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)+3x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)+3}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{g''(x)}{2} = \frac{g''(0)}{2}.$$
   Allo scopo di determinare $g''(0)$ deriviamo rispetto a x l'identità
$$f_x(x,g(x)) + f_y(x,g(x))g'(x) = g(x)^2 + g(x)\cos(xg(x)) + 3e^x + \big[2xg(x) + 1 + x\cos(xg(x))\big]g'(x) = 0.$$
   Si ottiene
$$\begin{aligned}&2g(x)g'(x) + g'(x)\cos(xg(x)) - g(x)\sin(xg(x))(g(x) + xg'(x)) + 3e^x + \\ &\big[2g(x) + 2xg'(x) + \cos(xg(x)) - x\sin(xg(x))(g(x) + xg'(x))\big]g'(x) + \big[2xg(x) + 1 + x\cos(xg(x))\big]g''(x) = 0,\end{aligned}$$
   da cui, calcolando tutto per $x = 0$ e ricordando che $g(0) = 0$, $g'(0) = -3$, si ha l'equazione
$$-3 + 3 - 3 + g''(0) = 0,$$
   e pertanto $g''(0) = 3$ e il limite cercato vale $\frac{3}{2}$.

2. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) = 4 - z$ sull'ellisse Γ in $\mathbb{R}^3$ ottenuta intersecando il cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 8$ con il piano $x + y + z = 1$.

   Soluzione. Poiché l'ellisse è un insieme compatto e la f è continua, il massimo e il minimo assoluti cercati esistono per il teorema di Weierstrass, e dovranno essere in particolare dei punti critici di

f vincolati a Γ. Pertanto, per determinarli, è sufficiente determinare il massimo e il minimo valore che f assume sui suoi punti critici vincolati a $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 = 8, \, x + y + z = 1\}$.

Allo scopo di determinare i punti critici vincolati, applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, determinando i punti critici liberi della funzione

$$h(x, y, z) = 4 - z - \lambda(x^2 + y^2 - 8) - \mu(x + y + z - 1).$$

Bisogna dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x\lambda + \mu = 0 \\ 2y\lambda + \mu = 0 \\ 1 + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Dalle prime tre equazioni si ha $\mu = -1$ e $x = y = 1/2\lambda$, che sostituite nella quarta danno $\lambda = \pm 1/4$ e quindi $x = y = \pm 2$. Infine utilizzando la quinta equazione si trovano i punti critici

$$P_1 = (2, 2, -3), \qquad P_2 = (-2, -2, 5).$$

Avendosi allora $f(2, 2, -3) = 7$ e $f(-2, -2, 5) = -1$ si conclude che $\max_\Gamma f = 7$, $\min_\Gamma f = -1$.