Esercitazioni del corso di Analisi II
CdL in Ingegneria Meccanica e Energetica
a.a. 2012-13

G. Morsella

31/10/2012

1. Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{2xy}{(1-x^2-y^2)^2}dx + \frac{1-x^2+y^2}{(1-x^2-y^2)^2}dy,$$

   (a) determinarne l'insieme di definizione D;

   (b) calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è una curva regolare il cui sostegno è contenuto in D ed avente per estremo iniziale e finale i punti $(3,0)$, $(0,3)$ rispettivamente.

Soluzione. (a) Si ha chiaramente $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 1\}$, che non è connesso, ma $D = D_1 \cup D_2$, con $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ semplicemente connesso, e $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$ connesso ma non semplicemente connesso.

(b) Poiché della curva γ sono specificati soltanto gli estremi, è naturale ipotizzare che ω sia esatta, in modo da poter utilizzare la formula

$$\int_\gamma \omega = f(0,3) - f(3,0),$$

con f primitiva di ω. Verifichiamo intanto che ω è chiusa:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\frac{2xy}{(1-x^2-y^2)^2} &= \frac{2x(1-x^2-y^2)^2+4xy^2(1-x^2-y^2)}{(1-x^2-y^2)^4} = \frac{2x(1-x^2-y^2)+8xy^2}{(1-x^2-y^2)^3} \\
&= \frac{2x-2x^3+6xy^2}{(1-x^2-y^2)^3}, \\
\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-x^2+y^2}{(1-x^2-y^2)^2} &= \frac{-2x(1-x^2-y^2)^2+4x(1-x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}{(1-x^2-y^2)^4} \\
&= \frac{-2x(1-x^2-y^2)+4x(1-x^2+y^2)}{(1-x^2-y^2)^3} = \frac{2x-2x^3+6xy^2}{(1-x^2-y^2)^3}.
\end{aligned}$$

Cerchiamo poi una primitiva f di ω nell'insieme D_2 che contiene i punti $(0,3)$, $(3,0)$, e quindi il sostegno di γ. Deve essere

$$f(x,y) = \int \frac{2xy}{(1-x^2-y^2)^2}dx = -y\int \frac{d(1-x^2-y^2)}{(1-x^2-y^2)^2}dx = \frac{y}{1-x^2-y^2} + g(y),$$

dove g è determinata dall'equazione

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1-x^2-y^2} + g(y)\right) = \frac{1-x^2+y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

da cui $g'(y) = 0$ e quindi $g(y) = c$, costante arbitraria. Dunque ω è esatta e tutte le sue primitive nell'insieme connesso D_2 sono date da

$$f(x,y) = \frac{y}{1-x^2-y^2} + c \qquad (x,y) \in D_2$$

(notare che f è effettivamente di classe C^1 in D_2, come deve essere, per definizione, una primitiva). Ne segue

$$\int_\gamma \omega = f(0,3) - f(3,0) = -\frac{3}{8}.$$

2. Data la forma differenziale

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

   (a) calcolare $\int_{\gamma_1} \omega$, dove γ_1 è il triangolo di vertici $(2,-1)$, $(-1,3)$, $(6,4)$, orientato positivamente;

   (b) calcolare $\int_{\gamma_2} \omega$, dove γ_2 è il triangolo di vertici $(2,-1)$, $(-1,3)$, $(-2,-2)$, orientato positivamente.

Soluzione. (a) L'insieme di definizione di ω è $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, non semplicemente connesso, ed è noto che ω è chiusa. Il triangolo γ_1 lascia l'origine all'esterno (fare il disegno). Si capisce allora intuitivamente che γ_1 è omotopa a un punto in D, ad esempio al suo vertice $(2,-1)$, e che quindi (pensando il vertice come una curva costante γ_0)

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_0} \omega = 0.$$

Verifichiamo che è effettivamente così. Per fissare le idee, scegliamo una parametrizzazione $t \in [0,3] \mapsto \gamma_1(t)$ del triangolo, ottenuta parametrizzando i singoli lati (segmenti), tale che $\gamma_1(0) = \gamma_1(3) = (2,-1)$. Si consideri poi l'omotetia di centro $(2,-1)$ e ragione $\lambda > 0$, $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definita da

$$\varphi_\lambda(x,y) = (2 + \lambda(x-2), -1 + \lambda(x+1)), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(2,-1)\}$ fissato, la funzione $\lambda \in [0,1] \mapsto \varphi_\lambda(x,y) \in \mathbb{R}^2$ definisce una curva continua, il cui sostegno è il segmento da $(2,-1)$ a (x,y). In particolare quindi $\varphi_0(x,y) = (2,-1)$, $\varphi_1(x,y) = (x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(2,-1)\}$. Inoltre $\varphi_\lambda(2,-1) = (2,-1)$ per ogni $\lambda \geq 0$. Si ha allora che un'omotopia tra γ_1 e la curva costante $\gamma_0(t) = (2,-1)$, $t \in [0,3]$, si ottiene tramite

$$\varphi : [0,3] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(t,\lambda) := \varphi_\lambda(\gamma_1(t)), \qquad (t,\lambda) \in [0,3] \times [0,1].$$

Infatti si ha chiaramente $\varphi \in C^0([0,3] \times [0,1])$, in quanto composizione di funzioni continue, ed inoltre

$$\varphi(t,0) = \varphi_0(\gamma_1(t)) = (2,-1), \quad \varphi(t,1) = \varphi_1(\gamma_1(t)) = \gamma_1(t), \qquad \forall\, t \in [0,3],$$
$$\varphi(0,\lambda) = \varphi_\lambda(2,-1) = (2,-1) = \varphi(3,\lambda), \qquad \forall \lambda \in [0,1].$$

Ne segue dunque che effettivamente γ_1 e γ_0 sono omotope e quindi $\int_{\gamma_1} \omega = 0$.

Alternativamente si potrebbe argomentare così: γ_1 è una curva chiusa contenuta in un semipiano aperto che non contiene l'origine, che è chiaramente semplicemente connesso. Dunque ω è esatta in tale semipiano e quindi $\int_{\gamma_1} \omega = 0$

(b) In questo caso γ_2 circonda l'origine, ed è quindi naturale immaginare che sia omotopo a una circonferenza γ_r di raggio $r > 0$ centrata nell'origine, da cui seguirebbe

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_r} \omega = 2\pi.$$

Dimostriamo che questo è vero. Scegliamo $r = \|(-1,3)\| = \sqrt{10}$ (massima distanza dall'origine dei vertici di γ_2) e, fissata una parametrizzazione $\gamma_2 : [0,3] \to \mathbb{R}^2$ del triangolo tale che $\gamma_2(0) = (-1,3) = \gamma_2(3)$, consideriamo la funzione

$$\varphi(t,\lambda) := \left[1 + \lambda\left(\frac{r}{\|\gamma_2(t)\|} - 1\right)\right]\gamma_2(t), \qquad (t,\lambda) \in [0,3] \times [0,1].$$

Per ogni $t \in [0,3]$ fissato, $\lambda \in [0,1] \mapsto \varphi(t,\lambda)$ è il segmento che unisce il punto $\gamma_2(t)$ al punto della circonferenza di raggio r centrata nell'origine $r\gamma_2(t)/\|\gamma_2(t)\|$, che è sulla semiretta uscente dall'origine e passante per $\gamma_2(t)$. Poiché $\|\gamma_2(t)\| \neq 0$ per ogni $t \in [0,3]$, si ha che $\varphi \in C^0([0,3] \times [0,1])$, e si verifica subito che φ è un'omotopia tra γ_2 e la curva

$$\gamma_3(t) := \varphi(t,1) = r\gamma_2(t)/\|\gamma_2(t)\|, \qquad t \in [0,3],$$

che altri non è se non la circonferenza γ_r parametrizzata diversamente. Ma poiché l'integrale di una forma differenziale su una curva non dipende dalla parametrizzazione concludiamo che

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_r} \omega = 2\pi.$$