Esercitazioni del corso di Analisi II
CdL in Ingegneria Meccanica e Energetica
a.a. 2012-13

G. Morsella

24/10/2012

1. Calcolare la lunghezza dei seguenti archi di curva:

   (a) arco della curva $f(x) = \log x$ fra i punti di ascissa $x = \sqrt{3}$ e $x = \sqrt{8}$;

   (b) arco della spirale di Archimede $\rho(\theta) = a\theta$ $(a > 0)$ per $\theta \in [0, 2\pi]$;

   (c) arco della cicloide $\gamma(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t))$ $(R > 0)$ per $t \in [0, 2\pi]$;

   (d) curva di equazione implicita $(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 = 0$ $(a > 0)$.

   Soluzione. (a) Svolto ad esercitazione.

   (b) Poiché la funzione $\rho : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ è di classe C^1, la curva è rettificabile e la sua lunghezza è data da

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2}d\theta.$$

   La primitiva di $\theta \mapsto \sqrt{1 + \theta^2}$ si ottiene ricordando l'integrale notevole

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}} = \log\left(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}\right) + c$$

   (l'argomento del logaritmo è sempre positivo) e integrando per parti

$$\int \sqrt{1 + \theta^2}d\theta = \theta\sqrt{1 + \theta^2} - \int \frac{\theta^2}{\sqrt{1 + \theta^2}}d\theta = \theta\sqrt{1 + \theta^2} - \int \sqrt{1 + \theta^2}d\theta + \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}}$$

   da cui

$$\int \sqrt{1 + \theta^2}d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta\sqrt{1 + \theta^2} + \log\left(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}\right)\right] + c.$$

   Si ha pertanto

$$L = \frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{1 + \theta^2} + \log\left(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \log\left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}\right)\right].$$

   (c) La curva γ è di classe C^1 e quindi rettificabile, e la lunghezza si calcola tramite

$$L = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|dt = \int_0^{2\pi} \|(R(1 - \cos t), R\sin t)\|dt = \sqrt{2}R\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt.$$

   Moltiplicando e dividendo l'integrando per $\sqrt{1 + \cos t}$ si ottiene poi

$$L = \sqrt{2}R\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{1 + \cos t}}\, dt = \sqrt{2}R\int_0^{2\pi} \frac{|\sin t|}{\sqrt{1 + \cos t}}dt = \sqrt{2}R\left[\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \cos t}}dt - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \cos t}}dt\right].$$

   Gli ultimi due integrali si calcolano con la sostituzione $u = \cos t$, ottenendo

$$L = \sqrt{2}R\left[-\int_1^{-1} \frac{du}{\sqrt{1 + u}} + \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 + u}}\right] = 2\sqrt{2}R\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 + u}} = 4\sqrt{2}R\left[\sqrt{1 + u}\right]_{-1}^{1} = 8R.$$

   (d) Svolto ad esercitazione.

2. Data la curva γ in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ z - x = 2y \end{cases}$$

calcolare

$$\int_\gamma \sqrt{5 + \frac{3}{2}yz - \frac{11}{2}xy}\, ds.$$

Soluzione. Per poter calcolare l'integrale, abbiamo bisogno di una parametrizzazione di γ. Osservando che la prima equazione che definisce γ è, in due dimensioni, quella di un'ellisse centrata nell'origine e di semiassi 2, 1, che ha la parametrizzazione $(x(t), y(t)) = (2\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, e sostituendo quest'ultima nella seconda equazione, si ottiene per γ la parametrizzazione

$$\gamma(t) = (2\cos t, \sin t, 2(\cos t + \sin t)), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Ne segue che

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t + 4(\sin^2 t + \cos^2 t - 2\sin t\cos t)} = \sqrt{5 + 3\sin^2 t - 8\sin t\cos t},$$

e detto pertanto I l'integrale curvilineo richiesto, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\big(5 + 3\sin t(\cos t + \sin t) - 11\cos t\sin t\big)\big(5 + 3\sin^2 t - 8\sin t\cos t\big)}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(5 + 3\sin^2 t - 8\sin t\cos t)^2}\, dt. \end{aligned}$$

Tenendo allora conto del fatto che, come visto sopra, $5 + 3\sin^2 t - 8\sin t\cos t = \|\gamma'(t)\|^2 \geq 0$, si ha

$$I = \int_0^{2\pi} (5 + 3\sin^2 t - 8\sin t\cos t)\, dt = 13\pi.$$

3. Data la curva

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad a, b > 0$$

(detta *elica cilindrica* di raggio a e passo b):

(a) dimostrare che è semplice e regolare;

(b) disegnare qualitativamente il sostegno di γ;

(c) parametrizzare γ tramite l'ascissa curvilinea.

Soluzione. (a) Semplicità: è chiaro che $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies bt_1 = bt_2$ e quindi $t_1 = t_2$.

Regolarità: si ha chiaramente $\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \neq (0, 0, 0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ (la terza componente non è mai nulla).

(b) Il sostegno si ottiene facilmente osservando che quando t varia in ogni intervallo $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, la proiezione del punto $\gamma(t)$ sul piano x, y descrive una circonferenza di raggio a centrata nell'origine, mentre la terza coordinata $z(t) = bt$ cresce linearmente.

(c) Prendendo il punto $\gamma(0)$ come origine dell'ascissa curvilinea $t \mapsto s(t)$, si ha

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2\tau + a^2\cos^2\tau + b^2}\, d\tau = \sqrt{a^2 + b^2}\, t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La funzione inversa di $t \in \mathbb{R} \mapsto s(t)$ è ovviamente la funzione $t(s) = s/\sqrt{a^2 + b^2}$, $s \in \mathbb{R}$, per cui la parametrizzazione di γ tramite l'ascissa curvilinea è data da

$$\varphi(s) := \gamma(t(s)) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \qquad s \in \mathbb{R}.$$