Esercitazioni del corso di Analisi II
CdL in Ingegneria Meccanica e Energetica
a.a. 2012-13

G. Morsella

17/10/2012

1. Studiare la natura dei punti stazionari delle seguenti funzioni:

$$\text{(a) } f(x,y) = xy(x-1); \qquad \text{(b) } f(x,y) = x^4 + y^4 + 1 + (x+y)^2;$$
$$\text{(c) } f(x,y) = xe^y - ye^x; \qquad \text{(d) } f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz.$$

Soluzione. (a) e (b) svolti a esercitazione.

(c) I punti stazionari si determinano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^y - ye^x = 0 \\ f_y(x,y) = xe^y - e^x = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene la relazione $e^y = ye^x$, che sostituita nella seconda fornisce $(xy-1)e^x = 0$, da cui $xy = 1$ e cioè, essendo $x \neq 0$, $y = 1/x$. Sostituendo di nuovo nella prima equazione si ottiene

$$e^x = xe^{1/x},$$

che ha la soluzione ovvia $x = 1$. Per escludere che ci siano altre soluzioni, si può considerare la funzione

$$g(x) := e^x - xe^{1/x}, \qquad x > 0,$$

e studiarne l'andamento. Si ha $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e

$$g'(x) = e^x - \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x} > 0, \qquad x > 0,$$

in quanto per $x \in (0,1)$ è $1 - 1/x < 0$, mentre per $x > 1$ si ha $x > 1/x$ e dunque $e^x > e^{1/x} > (1-1/x)e^{1/x}$. Dunque $x = 1$ è l'unico zero della funzione g, e pertanto $P := (1,1)$ è l'unico punto stazionario di f. L'hessiana di f è

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -ye^x & e^y - e^x \\ e^y - e^x & xe^y \end{pmatrix} \implies D^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix},$$

da cui si vede che P è un punto di sella per f.

(d) I punti stazionari si determinano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = 2x - yz = 0 \\ f_y(x,y,z) = 2y - xz = 0 \\ f_z(x,y,z) = 2z - xy = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ha la soluzione evidente $P_0 = (0,0,0)$. Supponendo allora $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ e moltiplicando la prima equazione per x, la seconda per y e sottranedole, si ottiene $x^2 = y^2$, cioè

$x = \pm y$. Sostituendo questo nella prima equazione si ottiene $z = \pm 2$. Sostituendo tutto nella terza equazione si ha infine $\pm 4 \mp x^2 = 0$, da cui $x = \pm 2$. Pertanto gli altri punti stazionari di f sono

$$P_i = (\pm 2, \pm 2, 2), i = 1, 2, \quad P_i = (\pm 2, \mp 2, -2), i = 3, 4,$$

(segni superiori o inferiori). Poiché però la funzione data è simmetrica per scambio dei segni simultaneo di due delle tre variabili, è sufficiente considerare, oltre a P_0, il solo punto stazionario $P_1 = (2, 2, 2)$ (gli altri si ottengono da questo appunto cambiando segno a due delle tre variabili).

L'hessiana di f è data da

$$D^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -z & -y \\ -z & 2 & -x \\ -y & -x & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha allora

$$D^2 f(2, 2, 2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \implies \det D^2 f(2, 2, 2) = -32 < 0, \operatorname{tr} D^2 f(2, 2, 2) = 6 > 0,$$

e quindi, ricordando che il determinante e la traccia di una matrice (anche non diagonale) sono sempre pari rispettivamente al prodotto e alla somma dei suoi autovalori, si deduce che $D^2 f(2, 2, 2)$ ha un autovalore negativo e due positivi, e quindi $P_1 = (2, 2, 2)$ è un punto di sella, e così anche P_i, $i = 2, 3, 4$. Infine

$$D^2 f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e dunque P_0 è un punto di minimo relativo (tutti gli autovalori sono positiivi).

2. Determinare estremi relativi ed assoluti delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = |xy|(x + y - 1)$; (b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$;
(c) $f(x, y, z) = (x^3 - 3x - y^2)z^2 + z^3$; (d) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

Soluzione. (a) Dalla teoria sappiamo che se un estremo relativo è un punto in cui la funzione è di classe C^1, allora è un punto stazionario. Quindi, come nel caso di funzioni di una variabile, gli estremi relativi andranno cercati tra i punti stazionari e tra i punti in cui la funzione non è C^1. La funzione data è C^1 in $\mathbb{R}^2$ privato degli assi. Cominciamo a considerare i punti sugli assi, cioè quelli della forma $(x, 0)$ o $(0, y)$. In tali punti il valore della funzione è 0. Osservando poi che si ha $f(x, y) > 0 \Leftrightarrow y > 1 - x$ si vede che i punti $(x, 0)$ sono di minimo relativo se $x > 1$ e di massimo relativo se $x < 1$ (in un intorno sufficientemente piccolo la funzione è positiva o negativa rispettivamente - fare un disegno!), mentre $(1, 0)$ è un punto di sella. Similmente i punti $(0, y)$ sono di minimo relativo se $y > 1$ e di massimo relativo se $y < 1$, mentre $(0, 1)$ è un punto di sella.

Supponiamo ora $xy \neq 0$. Poiché se $xy > 0$ o se $xy < 0$ la funzione data cambia semplicemente di segno, i punti critici, per $xy \neq 0$, si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2xy + y^2 - y = y(2x + y - 1) = 0 \\ f_y(x, y) = x^2 + 2xy - x = x(x + 2y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

dove si è tenuto conto che $x, y \neq 0$. Si vede facilmente che l'unica soluzione del sistema è $P_1 = (1/3, 1/3)$, che si trova nell'insieme in cui $xy > 0$. In tale insieme l'hessiana della funzione data è

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y - 1 \\ 2x + 2y - 1 & 2x \end{pmatrix},$$

da cui

$$D^2 f(1/3, 1/3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \implies \det D^2 f(1/3, 1/3) = 1/3 > 0,$$

e pertanto P_1 è un punto di minimo relativo, in cui la funzione assume il valore $f(1/3, 1/3) = -1/27$.
Riassumendo, si sono ottenuti i punti di massimo relativo $(x, 0)$, $x > 1$, e $(0, y)$, $y > 1$, in cui la funzione vale 0, e i punti di minimo relativo $(x, 0)$ $x < 1$, e $(0, y)$, $y < 1$, in cui la funzione vale ancora 0, ed infine il punto di minimo relativo $(1/3, 1/3)$ in cui la funzione vale $-1/27$. Per decidere se alcuni di questi punti, e eventualmente quali, sono massimi o minimi assoluti, bisogna studiare il comportamento della funzione all'infinito. Calcolando la funzione sulla retta $y = x$ si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x, x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2(2x - 1) = \pm\infty$$

e dunque f non ha massimi né minimi assoluti.
(b) La funzione data è $C^2(\mathbb{R}^2)$. Imponendo l'annullarsi del gradiente si ottiene il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4(x^3 - y) = 0 \\ f_y(x, y) = 4(y^3 - x) = 0 \end{cases}$$

che si vede facilmente avere le soluzioni $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (-1, -1)$. L'hessiana di f è

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix},$$

da cui

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^2 f(\pm1, \pm1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix},$$

e si conclude pertanto che P_0 è un punto di sella e $P_{1,2}$ punti di minimo relativo, in cui la funzione assume il valore $f(\pm1, \pm1) = -2$. Calcoliamo poi $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$. Usando coordinate polari si ha

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - 4\rho^2\cos\theta\sin\theta.$$

Osservando allora che la funzione $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \cos^4\theta + \sin^4\theta$, essendo continua e strettamente positiva, ammette un minimo $m > 0$, e che $|\cos\theta\sin\theta| \le 1$, si ottiene la minorazione, uniforme in θ,

$$\rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - 4\rho^2\cos\theta\sin\theta \ge m\rho^4 - 4\rho^2,$$

da cui si conclude che $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = +\infty$. Ne segue che $P_{1,2}$ sono punti di minimo assoluto di f, e che non ci sono punti di massimo assoluto.
(c) Si ha $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, e i punti stazionari si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = z^2(3x^2 - 3) = 0 \\ f_y(x, y, z) = -2yz^2 = 0 \\ f_z(x, y, z) = z(2x^3 - 6x - 2y^2 + 3z) = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $P_{1,2} = (\pm1, 0, \pm4/3)$ (segni superiori o inferiori) e tutti i punti della forma $(x, y, 0)$, $x, y \in \mathbb{R}$. L'hessiana di f è

$$D^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6xz^2 & 0 & 2z(3x^2 - 3) \\ 0 & -2z^2 & -4yz \\ 2z(3x^2 - 3) & -4yz & 2x^3 - 6x - 2y^2 + 6z \end{pmatrix},$$

e quindi

$$D^2 f(\pm1, 0, \pm4/3) = \begin{pmatrix} \pm32/3 & 0 & 0 \\ 0 & -32/9 & 0 \\ 0 & 0 & \mp4 \end{pmatrix},$$

da cui si vede che $P_{1,2}$ sono punti di sella (gli autovalori non sono tutti dello stesso segno). Si ha poi che

$$D^2 f(x, y, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x^3 - 6x - 2y^2 \end{pmatrix}$$

ha due autovalori nulli, e pertanto non dà informazioni sulla natura dei punti critici del tipo $(x, y, 0)$. In tali punti si ha $f(x, y, 0) = 0$, e scrivendo $f(x, y, z) = z^2(x^3 - 3x - y^2 + z)$ si vede che f ha lo stesso segno della funzione continua $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z) := x^3 - 3x - y^2 + z$. Dato allora un punto $(x, y, 0)$ tale che $x^3 - 3x - y^2 = g(x, y, 0) > 0$ si avrà $g(x', y', z') > 0$ e quindi $f(x', y', z') \geq 0$ in un intorno di $(x, y, 0)$, che sarà dunque un punto di minimo relativo. Similmente un punto $(x, y, 0)$ con $x^3 - 3x - y^2 < 0$ è un punto di massimo relativo, e infine se $x^3 - 3x - y^2 = 0$ è un punto di sella. Si ha poi chiaramente, per ogni x, y fissati, $\lim_{z \to \pm\infty} f(x, y, z) = \pm\infty$, e dunque f non ha né minimi né massimi assoluti.

(d) I punti stazionari si ottengono risolvendo

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y) = 0 \\ f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y) = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $P_0 = (0, 0)$, $P_{1,2} = (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$. L'hessiana è

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix},$$

da cui

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \qquad D^2 f(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix},$$

e pertanto $P_{1,2}$ sono punti di minimo relativo, mentre su P_0 non si hanno informazioni. Osservando però che si ha

$$f(x, x) = 2x^4 > 0, \qquad f(x, -x) = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4) < 0$$

in un intorno di $x = 0$ (con $x \neq 0$), si vede che P_0 è un punto di sella. Infine, ragionando in modo simile a quanto fatto nell'esercizio (b), si vede che $\lim_{(x,y) \to \infty} f(x, y) = +\infty$, e quindi $P_{1,2}$ sono punti di minimo assoluto in cui $f(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = -8$, mentre non ci sono punti di massimo assoluto.