Esercitazioni del corso di Analisi II
CdL in Ingegneria Meccanica e Elettrica
a.a. 2012-13

G. Morsella

10/10/2012

1. Si consideri l'espressione
$$g(x) = \int_0^1 e^{-xt^2}\,dt.$$
   (a) Trovare il dominio di g.
   (b) Determinare lo sviluppo di MacLaurin di g.
   (c) Calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$.

Soluzione. (a) $D = \mathbb{R}$ (svolto a esercitazione).

(b)
$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} x^k + o(x^n), \qquad x \in \mathbb{R}$$
(svolto a esercitazione).

(c) Per calcolare i limiti richiesti, non si può utlizzare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, visto a lezione, in quanto questo si applica solo a funzioni g definite su intervalli chiusi e limitati (e quindi a limiti al finito).

Si può invece procedere al modo seguente. Consideriamo dapprima il limite per $x \to +\infty$, e supponiamo quindi $x > 0$. Per eliminare la dipendenza da x dell'integrando, si può effettuare il cambiamento di variabili $u = \sqrt{x}t$, grazie al quale
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,du, \qquad x > 0,$$
da cui segue subito che, essendo $u \mapsto e^{-u^2}$ integrabile in $[0, +\infty)$,
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$
Invece per $x < 0$ si può effettuare il cambiamento di variabile $v = \sqrt{-x}t$ da cui
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \int_0^{\sqrt{-x}} e^{v^2}\,dv, \qquad x < 0.$$
Poiché ora la funzione $v \mapsto e^{v^2}$ non è integrabile in $[0, +\infty)$ si ha che
$$\lim_{x\to-\infty} \int_0^{\sqrt{-x}} e^{v^2}\,dv = \int_0^{+\infty} e^{v^2}\,dv = +\infty,$$
e dunque, utilizzando il teorema di de L'Hopital,
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{-x}} \int_0^{\sqrt{-x}} e^{v^2}\,dv = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}\frac{1}{2\sqrt{-x}}}{-\frac{1}{2\sqrt{-x}}} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty.$$