Esame di Analisi Matematica 2 – 24/9/2013
Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Energetica
A.A. 2012/2013

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):... CFU:......

Esercizio 1. Sia A il cerchio aperto del piano di centro l'origine e raggio 1. Sia $f(x,y)$ una funzione di classe C^2 su A tale che $f_y(0,0) > 0$ e h la funzione definita implicitamente da f in intorno di 0. Assunto che $f_x(0,0) = 0$, dare una condizione su f_{xx} affinché h abbia un minimo in 0.

Risoluzione *motivata:* Dal teorema di Dini si sa che

$$(*) \qquad h'(x) = -\frac{f_x(x,h(x))}{f_y(x,h(x))},$$

per ogni x in un intorno di $x = 0$. Dunque, poiché $h(0) = 0$ per ipotesi, sostituendo $x = 0$ nella $(*)$ si trova $h'(0) = 0$, cioè che $x = 0$ è un punto stazionario di h. Pertanto una condizione sufficiente affinché sia un minimo è che risulti $h''(0) > 0$. D'altra parte derivando la $(*)$ rispetto a x si trova, grazie alla regola di derivazione delle funzioni composte,

$$h''(x) = -\frac{[f_{xx}(x,h(x)) + f_{xy}(x,h(x))h'(x)]f_y(x,h(x)) - [f_{xy}(x,h(x)) + f_{yy}(x,h(x))h'(x)]f_x(x,h(x))}{f_y(x,h(x))^2},$$

e quindi, tenendo conto che $h'(0) = f_x(0,0) = 0$,

$$h''(0) = -\frac{f_{xx}(0,0)}{f_y(0,0)}.$$

Dunque una condizione sufficiente affinché h abbia un minimo in $x = 0$ è che risulti $f_{xx}(0,0) < 0$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):.. CFU:......

Esercizio 2. Studiare la continuità, derivabilità, differenziablità, in tutto il dominio, della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|^{5\alpha}(x^2+y^2)}{\sinh^\alpha(x^2+y^2)} \ , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risoluzione *motivata:* Il dominio della funzione data è $D = \mathbb{R}^2$ per $\alpha \geq 0$, e $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \ : \ x \neq 0\}$ per $\alpha < 0$, e chiaramente f è continua, derivabile e differenziabile in $D \setminus \{(0,0)\}$. Inoltre, se $\alpha < 0$ sicuramente f non sarà derivabile rispetto a x, né differenziabile, in $(0,0)$, poiché non è nemmeno definita nei punti $(x,0)$ con $x \neq 0$.

Continuità in $(0,0)$. In base al limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\sinh t}{t} = 1$, si ha

$$(*) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^{5\alpha}(x^2+y^2)}{\sinh^\alpha(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^{5\alpha}}{(x^2+y^2)^{\alpha-1}},$$

e passando a coordinate polari

$$\frac{|y|^{5\alpha}}{(x^2+y^2)^{2\alpha-1}} = \frac{\rho^{5\alpha}|\cos\theta|^{5\alpha}}{\rho^{2\alpha-2}} = \rho^{3\alpha+2}|\cos\theta|^{5\alpha}.$$

Da questo si vede che il limite in $(*)$ è $+\infty$ se $\alpha < -2/3$ e non esiste se $\alpha = -2/3$, mentre se $\alpha > -2/3$, essendo $\rho^{3\alpha+2}|\cos\theta|^{5\alpha} \leq \rho^{3\alpha+2} \to 0$ per $\rho \to 0$, il limite vale 0. Dunque f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > -2/3$.

Derivabilità in $(0,0)$. Si ha

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|^{5\alpha+2}}{y\sinh^\alpha(y^2)} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|^{5\alpha+2}}{y^{2\alpha+1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -1/3 \\ \nexists \text{ o } \infty & \text{se } \alpha \leq -1/3, \end{cases}$$

dunque $\exists\, f_y(0,0) = 0$ se e solo se $\alpha > -1/3$. Inoltre, se $\alpha \geq 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0,$$

e quindi $\exists\, f_x(0,0) = 0$, mentre, come già detto, se $\alpha < 0$ $f_x(0,0)$ non esiste, in quanto f non è nemmeno definita sull'asse x (a parte che nell'origine).

Differenziabilità in $(0,0)$. Come già detto, se $\alpha < 0$ f non è definita in un intorno di $(0,0)$, e quindi non è differenziabile in $(0,0)$. Sia allora $\alpha \geq 0$. Si ha, ragionando come per la continuità,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^{5\alpha}\sqrt{x^2+y^2}}{\sinh^\alpha(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^{5\alpha}}{(x^2+y^2)^{\alpha-1/2}} = 0,$$

e pertanto f è differenziabile nell'origine se e solo se $\alpha \geq 0$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):... CFU:......

Esercizio 3. Usando anche il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, trovare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione

$$g(x,y) = 2xy$$

nel disco chiuso $D \equiv \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
Discutere l'esistenza di punti sella per g all'interno di D.

Risoluzione *motivata:* L'insieme D è compatto e g è continua, quindi massimo e minimo assoluti di g su D esistono per il teorema di Weierstrass. Per individuarli, bisogna determinare, tra i punti critici di g all'interno di D, e tra i punti critici di D vincolati a $\partial D = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 = 4\}$, quelli in cui g assume rispettivamente valore massimo e minimo.
Punti critici all'interno di D. Si ha $\nabla g(x,y) = (2y, 2x)$, dunque l'unico punto critico all'interno di D è l'origine, e si ha $g(0,0) = 0$. Inoltre l'hessiana di g è

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det H(0,0) = -4 < 0,$$

e pertanto $(0,0)$ è l'unico punto di sella di g all'interno di D.
Punti critici vincolati a ∂D. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, bisogna imporre l'annullarsi del gradiente della funzione

$$h(x,y,\lambda) = 2xy - \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Si ottiene quindi il sistema

$$\begin{cases} y - \lambda x = 0 \\ x - \lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \lambda x \\ (1-\lambda^2)x = 0 \\ (1+\lambda^2)x^2 = 4. \end{cases}$$

La soluzione $x = 0$ della seconda equazione chiaramente non è accettabile poiché non soddisfa la terza equazione, mentre le soluzioni $\lambda = \pm 1$ della seconda equazione, sostituite nella terza danno $x = \pm\sqrt{2}$, e pertanto si ottengono i quattro punti critici

$$P_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad P_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad P_3 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad P_4 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Essendo

$$g(P_1) = g(P_2) = 4, \qquad g(P_3) = g(P_4) = -4,$$

si vede che P_1, P_2 sono massimi assoluti, e quindi anche relativi, e P_3 e P_4 sono minimi assoluti, e quindi anche relativi, di g in D. Infine non esistono altri massimi o minimi relativi, poiché questi dovrebbero essere punti critici di g all'interno di D o punti critici di g vincolati a ∂D, e li abbiamo individuati tutti.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):.. CFU:......

Esercizio 4. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-4x)^n}{n5^n+n}$$

è convergente e per quali è assolutamente convergente.
Determinare inoltre gli intervalli di convergenza uniforme e totale.

Risoluzione <u>*motivata*</u>: Effettuando il cambiamento di variabile $z = x^2 - 4x$ ci si riconduce allo studio della serie di potenze

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n5^n+n}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n5^n+n}{(n+1)5^{n+1}+n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5}\frac{n}{n+1}\frac{1+1/5^n}{1+1/5^{n+1}} = \frac{1}{5},$$

il raggio di convergenza di tale serie è $R = 5$. Inoltre agli estremi dell'intervallo di convergenza, $z = \pm 5$, si ottengono le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n5^n+n}, \quad \frac{5^n}{n5^n+n} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+1/5^n} \sim \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \text{non convergente,}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n5^n+n}, \quad \frac{(-1)^n 5^n}{n5^n+n} = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+1/5^n} \sim \frac{(-1)^n}{n} \quad \Rightarrow \quad \text{convergente semplicemente ma non assolutamente.}$$

Quindi la serie $(*)$ converge semplicemente per $z \in [-5, 5)$ e assolutamente per $z \in (-5, 5)$, e inoltre, in base ai teoremi sulle serie di potenze, converge totalmente negli intervalli chiusi $\{z : \alpha \le z \le \beta\}$ con $-5 < \alpha < \beta < 5$, e uniformemente negli intervalli chiusi $\{z : -5 \le z \le \beta\}$ con $\beta < 5$.
Tornando alla serie iniziale nella variabile x si ha

$$x^2 - 4x < 5 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 5, \qquad\qquad x^2 - 4x > -5 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

e dunque la serie data converge, sia semplicemente che assolutamente, se e solo se $x \in (-1, 5)$, e converge inoltre totalmente e uniformemente in ogni intervallo $[a, b]$ con $-1 < a < b < 5$.

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):... CFU:......

Esercizio 5. Si calcoli il seguente integrale superficiale

$$\int_\Sigma \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma,$$

dove Σ è la parte del piano $\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=x\big\}$ compresa nel cilindro $\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1\big\}$.

Risoluzione *motivata:* La superficie Σ è il grafico della funzione

$$z=f(x,y):=x \quad \text{nel dominio } D=\{(x,y) : x^2+y^2\le 1\}.$$

Pertanto la norma del vettore normale a Σ è data da

$$\|n(x,y)\|=\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}=\sqrt{2},$$

e l'integrale da calcolare diventa

$$\int_\Sigma \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\|n(x,y)\|\,dxdy = \text{(in coordinate polari)}$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\,\rho^2=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi.$$