Esame di Analisi Matematica 2 – 18/9/2013 **A**

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Energetica

A.A. 2012/2013

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):.. CFU:......

Esercizio 1. Sia C la regione aperta di $\mathbb{R}^2$ compresa tra le circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e 3. Sia ω una forma differenziale lineare *chiusa* definita su C. Dimostrare che ω è esatta se e solo se

$$\oint_\gamma \omega = 0$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2.

Se ora D è la regione aperta di $\mathbb{R}^3$ compresa tra le sfere di centro l'origine e raggi 1 e 3 e α una forma differenziale lineare *chiusa* definita su D, qual è una condizione necessaria e sufficiente affinché α sia esatta?

Risoluzione motivata: L'insieme C del testo è connesso ma non semplicemente connesso. Dalla teoria si sa che la forma differenziale ω è esatta se e solo se $\oint_\beta \omega = 0$ *per qualunque* curva chiusa β contenuta in C. Quindi in particolare, se ω è esatta, essendo la curva γ data nel testo chiusa, si avrà $\oint_\gamma \omega = 0$. Viceversa, se supponiamo che questo sia vero, per dimostrare che ω è esatta consideriamo una qualunque curva chiusa β contenuta in C e dimostriamo che $\oint_\beta \omega = 0$. Si possono presentare due casi: o β circonda il "buco" di C (cioè il disco $x^2 + y^2 \leq 1$), oppure non lo circonda. Nel primo caso, la curva β è chiaramente omotopa in C a γ, e dunque, essendo ω chiusa, $\oint_\beta \omega = \oint_\gamma \omega = 0$. Nel secondo caso, β è omotopa a un punto in C, e quindi, sempre per la chiusura di ω, $\oint_\beta \omega = 0$.

L'insieme D di $\mathbb{R}^3$ del testo è semplicemente connesso, e dunque una forma chiusa α definita su di esso è esatta.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):.. CFU:......

Esercizio 2. Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos(xy^3)-1}{(x^2+y^2)^{2\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione *motivata:* Continuità. Usando il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t^2} = 1/2$, si vede che la funzione data è continua se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^6}{(x^2+y^2)^{2\alpha}} = 0.$$

Passando a coordinate polari si ha

$$\frac{x^2y^6}{(x^2+y^2)^{2\alpha}} = \rho^{8-4\alpha} \cos^2\theta \sin^6\theta \leq \rho^{8-4\alpha},$$

e l'ultimo membro tende a zero per $8-4\alpha > 0$, cioè per $\alpha < 2$. Inoltre, sempre dall'espressione della funzione in coordinate polari, si vede che se $\alpha = 2$ il limite non esiste, e se $\alpha > 2$ è infinito. Pertanto la funzione data è continua se e solo se $\alpha < 2$.

Derivabilità. I rapporti incrementali della funzione nell'origine sono

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{\cos(0)-1}{x^{4\alpha+1}} = 0 \qquad \forall x \neq 0,$$
$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \frac{\cos(0)-1}{y^{4\alpha+1}} = 0 \qquad \forall y \neq 0,$$

e dunque $\exists\, f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Differenziabilità. In base alla definizione, e tenendo conto che le derivate parziali della funzione nell'origine sono nulle, bisognerà verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy^3)-1}{(x^2+y^2)^{2\alpha+1/2}} = 0,$$

e ragionando come per lo studio della continuità si vede che questo è vero se e solo se $\alpha < 7/4$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):.. CFU:......

Esercizio 3. Studiare la natura dei punti critici della funzione

$$g(x,y) = 2(x^4 + 16y^4 + 1) - (x+2y)^2 \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

stabilendo in particolare se eventuali massimi o minimi relativi sono anche assoluti.

Risoluzione *motivata:* Imponendo l'annullarsi del gradiente della funzione data, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 8x^3 - 2(x+2y) = 0 \\ g_y(x,y) = 128y^3 - 4(x+2y) = 0. \end{cases}$$

Sottraendo dalla prima equazione la seconda divisa per 2 si ottiene $8x^3 = 64y^3$, cioè $x = 2y$, che sostituita nella prima equazione dà $32y^3 - 4y = 4y(8y^2 - 1) = 0$, da cui si vede che i punti stazionari della g sono

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \quad P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

L'hessiana di g è

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 2 & -4 \\ -4 & 384y^2 - 8 \end{pmatrix},$$

e pertanto, essendo H invariante per $(x,y) \mapsto (-x,-y)$,

$$H(P_2) = H(P_3) = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 40 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H(P_{2,3}) = 384,$$

e quindi P_2 e P_3 sono minimi relativi di g. Si ha poi

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H(P_1) = 0,$$

per cui $H(P_1)$ è semidefinita e non dà informazioni sulla natura del punto stazionario. Osservando però che

$$g(x,0) = 2x^4 - x^2 + 2 \Rightarrow \frac{d}{dx} g(x,0)\Big|_{x=0} = 8x^3 - 2x\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2} g(x,0)\Big|_{x=0} = 24x^2 - 2\Big|_{x=0} = -2,$$

si vede che $x \mapsto g(x,0)$ ha un massimo in $x = 0$, mentre da

$$g(x, -x/2) = 4x^4 + 2$$

segue subito che $x \mapsto g(x,-x/2)$ ha un minimo per $x = 0$. Pertanto $P_1 = (0,0)$ è un punto di sella per g.

Resta da stabilire se i due minimi relativi P_2, P_3 (per i quali $g(P_2) = g(P_3) = 1$), sono anche minimi assoluti. A tale scopo calcoliamo $\lim_{(x,y)\to\infty} g(x,y)$. Passando a coordinate polari si ha

$$g(x,y) = 2\rho^4(\cos^4\theta + 16\sin^4\theta + 1) - \rho^2(\cos\theta + 2\sin\theta)^2 \geq 2m\rho^4 - 18\rho^2,$$

avendo indicato con $m > 0$ il minimo della funzione strettamente positiva $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \cos^4\theta + 16\sin^4\theta + 1$, e avendo usato la diseguaglianza ovvia $(\cos\theta + 2\sin\theta)^2 \leq 9$. Si ha allora $\lim_{(x,y)\to\infty} g(x,y) \geq \lim_{\rho\to+\infty} 2m\rho^4 - 18\rho^2 = +\infty$ e dunque P_2 e P_3 sono minimi assoluti per g.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):.. CFU:......

Esercizio 4. Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = \big(x(2+3y), y^2, z^2 - 2z^3 - 2z\big), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 3,\, |z| \le 1\}.$$

orientata in modo che il versore normale nel punto $(2,0,0)$ sia $n = (1,0,0)$.

Risoluzione *motivata:* Invece che calcolare direttamente l'integrale di superficie, conviene utilizzare il teorema della divergenza. A tale scopo osserviamo che la superficie Σ è la parte della sfera $x^2+y^2+z^2 = 3$ compresa tra i piani $z = \pm 1$, e non è pertanto una superficie chiusa. Considerato allora l'insieme

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le 3,\, |z| \le 1\},$$

cioè la parte della palla $x^2+y^2+z^2 \le 3$ compresa tra i piani $z = \pm 1$, si ha che $\partial D = \Sigma \cup \Sigma_+ \cup \Sigma_-$, dove

$$\Sigma_\pm := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le 3,\, z = \pm 1\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le 2,\, z = \pm 1\},$$

sono due dischi di raggio $\sqrt{2}$ sui piani $z = \pm 1$. Pertanto dal teorema della divergenza segue

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dxdydz = \iint_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \iint_\Sigma F \cdot n \, d\sigma + \iint_{\Sigma_+} F \cdot n \, d\sigma + \iint_{\Sigma_-} F \cdot n \, d\sigma,$$

cioè

$$\iint_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} F \, dxdydz - \iint_{\Sigma_+} F \cdot n \, d\sigma - \iint_{\Sigma_-} F \cdot n \, d\sigma,$$

dove l'orientamento di $\Sigma_\pm$ è definito dalla normale uscente da D. Si ha allora

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x} x(2+3y) + \frac{\partial}{\partial y} y^2 + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 - 2z^3 - 2z) = 5y + 2z - 6z^2,$$

e l'insieme D, espresso in coordinate cilindriche, diventa

$$D = \{(\rho,\theta,z) \,:\, \theta \in [0,2\pi], z \in [-1,1], 0 \le \rho \le \sqrt{3-z^2}\},$$

da cui

$$\begin{aligned}
\iiint_D \operatorname{div} F \, dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 dz \int_0^{\sqrt{3-z^2}} d\rho \, \rho(5\rho\sin\theta + 2z - 6z^2) = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \sin\theta = 0\right) \\
&= 2\pi \int_{-1}^1 dz \, (2z - 6z^2) \int_0^{\sqrt{3-z^2}} d\rho \, \rho = \pi \int_{-1}^1 dz \, (2z-6z^2)(3-z^2) \\
&= \pi \int_{-1}^1 dz \, (6z - 2z^3 - 18z^2 + 6z^4) = \left(\int_{-1}^1 dz \, (6z - 2z^3) = 0 \text{ per parità}\right) \\
&= \pi \left[-6z^3 + \frac{6}{5}z^5\right]_{-1}^1 = \pi\left(-12 + \frac{12}{5}\right) = -\frac{48}{5}\pi.
\end{aligned}$$

Si ha poi che le normali a $\Sigma_\pm$ uscenti da D sono rispettivamente $n_\pm = (0,0,\pm 1)$, e pertanto

$$\iint_{\Sigma_+} F \cdot n_+ \, d\sigma = \iint_{\Sigma_\pm} (z^2 - 2z^3 - 2z)|_{z=1} \, d\sigma = -3 \operatorname{Area}(\Sigma_+) = -6\pi$$

e analogamente $\iint_{\Sigma_-} F \cdot n_- \, d\sigma = -10\pi$. In definitiva allora il flusso di F attraverso Σ è

$$\iint_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \left(-\frac{48}{5} + 6 + 10\right)\pi = \frac{32}{5}\pi.$$

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):... CFU:......

Esercizio 5. Calcolare l'integrale complesso

$$\oint_\Gamma f(z)dz$$

dove $f(z) = \dfrac{z + (1 - e^{4z})^2}{\sin(3z^2)}$ e Γ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 percorsa in senso antiorario.

Risoluzione *motivata:* Poiché il denominatore della f si annulla per $z^2 = k\pi/3$, $k \in \mathbb{Z}$, la f ha singolarità isolate nei punti $z = \pm\sqrt{\frac{n\pi}{3}}, \pm i\sqrt{\frac{n\pi}{3}}$, $n \in \mathbb{N}$. Di questi, soltanto l'origine (corrispondente a $n = 0$) è all'interno della curva Γ, e quindi per il teorema dei residui

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(0).$$

Allo scopo di determinare il tipo di singolarità di f in $z = 0$ e calcolare il residuo osserviamo che si ha, usando gli sviluppi di Taylor del seno e dell'esponenziale,

$$\frac{z + (1 - e^{4z})^2}{\sin(3z^2)} = \frac{z + (4z + o(z))^2}{3z^2 + o(z^3)} = \frac{z + 16z^2 + o(z^2)}{3z^2 + o(z^3)} = \frac{1}{3z}\frac{1 + 16z + o(z)}{1 + o(z)}.$$

Poiché allora la funzione $z \mapsto \frac{1+16z+o(z)}{1+o(z)}$ è olomorfa in un intorno di $z = 0$ e tende a 1 per $z \to 0$, si ha che $z = 0$ è un polo di ordine 1 per f e $\operatorname{Res} f(0) = 1/3$, da cui

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \frac{2\pi i}{3}.$$