Esame di Analisi Matematica 2 – 24/7/2013 **A**
Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Energetica
A.A. 2012/2013

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):.. CFU:......

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che le derivate direzionali $D_u f$ e $D_v f$ esistono e sono continue su $\mathbb{R}^2$, dove $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $v = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Dimostrare che f è differenziabile.

Risoluzione *motivata:* I due vettori u e v, tra loro ortogonali, si ottengono dai vettori della base standard $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ tramite una rotazione (antioraria) di $\pi/4$, e definiscono quindi nel piano un sistema di coordinate ortonormali (ξ, η), ruotato dello stesso angolo rispetto al sistema di coordinate (x, y), e la relazione tra i due sistemi di coordinate sarà data da

$$(*) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \\ \eta = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Essendo dunque $\partial f/\partial \xi = D_u f$ e $\partial f/\partial \eta = D_v f$ continue, la funzione f sarà di classe C^1 nelle coordinate (ξ, η), e quindi, poiché le $(*)$ sono di classe C^∞, sarà C^1 anche nelle coordinate (x, y), e sarà pertanto differenziabile per il teorema del differenziale totale.

Esercizio 2. Si discuta la continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y} e^{-|y|^{\alpha+1}} \sqrt{x^2+y^2} \ , & y \neq 0, \\ 0 \ , & y = 0 \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risoluzione *motivata:* Continuità. Distinguiamo i casi $\alpha \geq -1$ e $\alpha < -1$. Se $\alpha \geq -1$ si ha

$$\exists \lim_{y\to 0} e^{-|y|^{\alpha+1}} \neq 0,$$

e dunque basta studiare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}$. Considerando le curve $y = mx^2$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^2}} \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{mx}\sqrt{x^2+m^2x^4} = \pm \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{m}\sqrt{1+m^2x^2} = \pm\frac{1}{m},$$

e dunque il limite non esiste e la funzione data non è continua. Se invece $\alpha < -1$, ricordando che $\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-1/t}}{t^\beta} = 0$ per ogni $\beta > 0$, si avrà, per (x,y) sufficientemente vicino a $(0,0)$,

$$\frac{x}{y} e^{-|y|^{\alpha+1}} \sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{y} e^{-1/|y|^{-(\alpha+1)}} \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{x|y|^\gamma}{y}\sqrt{x^2+y^2},$$

dove si può assumere che $\gamma = -\beta(\alpha+1) > 1$. Passando allora a coordinate polari si ottiene

$$\left| \frac{x|y|^\gamma}{y}\sqrt{x^2+y^2} \right| = \rho^{\gamma+1}|\cos\theta||\sin\theta|^{\gamma-1} \leq \rho^{\gamma+1} \to 0$$

e dunque la funzione considerata è continua se e solo se $\alpha < -1$.
Derivabilità. In base alla definizione di f si ha, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0,$$
$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Differenziabilità. In base a quanto visto studiando la continuità, affinché f possa essere differenziabile è necessario che $\alpha < -1$. Utilizzando la definizione, bisogna verificare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y} e^{-|y|^{\alpha+1}} = 0.$$

Ragionando come fatto per la continuità si vede che quest'ultimo limite è effettivamente verificato per ogni $\alpha < -1$.

Esercizio 3. Trovare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$g(x,y) = (1+xy)^3$$

nella regione E definita da $x^2+y^2 \leq 2$.
Discutere l'esistenza di punti sella per g all'interno di E.

Risoluzione <u>*motivata*</u>: L'insieme E è compatto (è la palla chiusa di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$), e g è continua. Quindi per il teorema di Weierstrass g ammette massimo e minimo assoluti su E, che potranno trovarsi o all'interno di E o sul suo bordo. Nel primo caso andranno ricercati tra i punti stazionari di g all'interno di E, e nel secondo tra i punti stazionari di g vincolati a ∂E.
Per determinare i punti stazionari all'interno di E imponiamo l'annullarsi del gradiente di g:

$$\begin{cases} 3y(1+xy)^2 = 0 \\ 3x(1+xy)^2 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha chiaramente come soluzioni il punto $(0,0)$ e i punti $(x,-1/x)$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Per verificare quali di questi ultimi sono interni a E bisogna risolvere la disequazione $x^2+1/x^2 < 2$, che equivale, essendo $x \neq 0$, a $x^4-2x^2+1 = (x^2-1)^2 < 0$, mai verificata. Dunque l'unico punto stazionario interno a E è $(0,0)$ e $g(0,0) = 1$.
Per determinare i punti stazionari di g vincolati a ∂E conviene parametrizzare ∂E, e studiare quindi la funzione

$$\varphi(\theta) = g(\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta) = (1+2\cos\theta\sin\theta)^3 = (1+\sin 2\theta)^3, \qquad \theta \in [0,2\pi].$$

Poiché la funzione $t \mapsto t^3$ è strettamente monotona crescente, il massimo e il minimo di φ si otterranno in corrispondenza rispettivamente del massimo e del minimo di $\theta \in [0,2\pi] \mapsto \sin 2\theta$, e dunque

$$\max_{[0,2\pi]} \varphi = \varphi(\pi/4) = \varphi(5\pi/4) = 2^3 = 8,$$
$$\min_{[0,2\pi]} \varphi = \varphi(3\pi/4) = \varphi(7\pi/4) = 0.$$

Ne segue:

$$\max_E g = g(1,1) = g(-1,-1) = 8, \qquad \min_E g = g(-1,1) = g(1,-1) = 0.$$

Infine per verificare se $(0,0)$, unico punto stazionario all'interno di E, è un punto di sella, calcoliamo l'hessiano di g:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6y^2(1+xy) & 3(1+xy)(1+3xy) \\ 3(1+xy)(1+3xy) & 6x^2(1+xy) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $(0,0)$ è un punto di sella per g (ed è quindi l'unico tale punto all'interno di E).

Esercizio 4. Determinare gli intervalli, limitati o illimitati, di $[0,+\infty)$ su cui la successione di funzioni $h_n(x) = x(x^{\frac{1}{n}} - 1)$, $n \in \mathbb{N}$, è uniformemente convergente.

Risoluzione <u>*motivata*</u>: Si ha chiaramente, per ogni $x \in [0,+\infty)$, $\lim_{n\to+\infty} x(x^{\frac{1}{n}} - 1) = 0$, cioè la successione $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente alla funzione identicamente nulla in $[0,+\infty)$. Poiché inoltre $\lim_{x\to+\infty} x(x^{\frac{1}{n}} - 1) = +\infty$, si ha, per ogni intervallo illimitato $I \subset [0,+\infty)$,

$$\sup_{x\in I} |h_n(x)| = +\infty \not\to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty$$

e dunque $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge uniformemente alla funzione nulla in I. Sia ora $J = [0,a]$. Per determinare l'estremo superiore di $|h_n(x)|$ in J calcoliamo

$$\frac{d}{dx} x(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \left(\frac{1}{n} + 1\right) x^{\frac{1}{n}} - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow x = x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n},$$

e dallo studio del segno della derivata si vede che h_n è decrescente in $(0, x_n)$ e crescente in $(x_n, +\infty)$. Inoltre $h_n(x_n) = -\frac{1}{n(1+1/n)^{n+1}} \to 0$. Ne segue in definitiva,

$$\sup_{x\in J} |h_n(x)| = \max\{|h_n(x_n)|, |h_n(a)|\} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty$$

e quindi $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente alla funzione nulla in J, e quindi in ogni intervallo limitato di $[0,+\infty)$.

Esercizio 5. Calcolare l'integrale curivilineo

$$\oint_\gamma \frac{\log(1+5z)}{z^3}dz$$

dove γ e la circonferenza di centro 0 e raggio 1/10 percorsa in senso antiorario.

Risoluzione motivata: La funzione $f(z) = \log(1+5z)/z^3$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0, \Re z < -1/5\})$, e dunque $z = 0$ è l'unica sua singolarità isolata interna alla curva γ. Pertanto, per il teorema dei residui

$$\oint_\gamma \frac{\log(1+5z)}{z^3}dz = 2\pi i \operatorname{Res} f|_{z=0}.$$

Allo scopo di calcolare il residuo possiamo determinare lo sviluppo di Laurent di f in $z = 0$ ricordando lo sviluppo di Taylor $\log(1+w) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}z^n/n$:

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(5z)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^n}{n}z^{n-3} = \sum_{n=-2}^{+\infty}\frac{(-1)^n 5^{n+3}}{n+3}z^n,$$

da cui

$$\operatorname{Res} f|_{z=0} = -\frac{25}{2} \quad \Rightarrow \quad \oint_\gamma \frac{\log(1+5z)}{z^3}dz = -25\pi i.$$