Esame di Analisi Matematica 2 – 18/7/2013

A

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Energetica
A.A. 2012/2013

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):.. CFU:......

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 sul piano tale che $f(0,0) = 0$. Supponiamo che il determinante Hessiano di f in $(0,0)$ sia negativo. Mostrare che f assume sia valori positivi che valori negativi.

Risoluzione motivata: Distinguiamo due casi:
(1) $\nabla f(0,0) = 0$: in questo caso $(0,0)$ è un punto di sella per f, e dunque è noto dalla teoria che f assume valori sia positivi che negativi in ogni suo intorno.
(2) $\nabla f(0,0) \neq 0$: in questo caso $(0,0)$ non è un punto di sella, in quanto non è nemmeno stazionario per f. Posto però $v := \frac{\nabla f(0,0)}{|\nabla f(0,0)|}$ e $g(t) := f(tv)$, $t \in \mathbb{R}$, la funzione g sarà di classe C^2 su $\mathbb{R}$ e tale che $g'(0) = \nabla f(0,0) \cdot v = |\nabla f(0,0)| > 0$ (per il teorema di derivazione delle funzioni composte). Da questo segue che g è strettamente crescente in un intorno di $t = 0$ e quindi assume valori negativi prima e positivi dopo tale punto, il che implica che anche f assume valori sia positivi che negativi. (Più precisamente: esisterà $\delta > 0$ tale che $g'(t) > 0$ per ogni $t \in (-\delta, \delta)$ (teorema di permanenza del segno applicato alla funzione continua g') e quindi, per il teorema di Lagrange,

$$f\Big(-\frac{\delta}{2}v\Big) = g\Big(-\frac{\delta}{2}\Big) - g(0) = -g'(\theta_1)\frac{\delta}{2} < 0,$$
$$f\Big(\frac{\delta}{2}v\Big) = g\Big(\frac{\delta}{2}\Big) - g(0) = g'(\theta_2)\frac{\delta}{2} > 0.)$$

Esercizio 2. Calcolare, usando i moltiplicatori di Lagrange, i punti di massima e minima distanza dall'origine dell'insieme

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = x^2(1 - x^2)\}$$

Risoluzione <u>*motivata*</u>*:* La distanza del generico punto $(x, y, z) \in M$ dall'origine è $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0$, ma poichè chiaramente una funzione non negativa è massima o minima se e solo se è massimo o minimo il suo quadrato, per semplificare i calcoli converrà trovare il massimo e il minimo della funzione $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ su M. Poiché $(0, 0, 0) \in M$ si avrà

$$\min_M f = f(0, 0, 0) = 0.$$

Per determinare $\max_M f$ applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, determinando i punti stazionari (appartenenti a M) della funzione

$$h(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 - x^4 - y^2 - z^2).$$

Imponendo l'annullarsi delle derivate e l'appartenenza a M si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2x(1 - \lambda - 2\lambda x^2) = 0 \\ 2y(1 + \lambda) = 0 \\ 2z(1 + \lambda) = 0 \\ x^2 - x^4 - y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

La seconda e la terza equazione hanno come soluzioni $\lambda = -1$ o $y = z = 0$. Sostiuendo $\lambda = -1$ nella prima equazione si ottiene $4x(1 + x^2) = 0$ che ha $x = 0$ come unica soluzione, che sostituita nell'ultima equazione dà anche $y = z = 0$ e quindi si ritrova l'origine. Se invece si sostituisce $y = z = 0$ nell'ultima equazione si ottiene $x^2 - x^4 = x^2(1 - x^2) = 0$ che ha le soluzioni non nulle $x = \pm 1$, e dunque

$$\max_M f = f(\pm 1, 0, 0) = 1.$$

Esercizio 3. Calcolare l'integrale

$$\iint_D e^{\frac{2x-y}{2x+y}}\, dxdy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 2x+y < 1\}$.

Risoluzione *<u>motivata</u>:* È naturale fare il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} u = 2x - y \\ v = 2x + y \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{4} \\[2ex] y = \dfrac{v-u}{2} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4},$$

tramite il quale l'insieme di integrazione D si trasforma nel triangolo

$$T = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u+v > 0,\ v-u > 0,\ v < 1\} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, v \in (0,1),\ -v < u < v\}.$$

Pertanto l'integrale considerato diventa

$$\frac{1}{4}\iint_T e^{u/v}\, dudv = \frac{1}{4}\int_0^1 dv \int_{-v}^{v} du e^{u/v} = \frac{1}{4}\int_0^1 dv \left[ve^{u/v}\right]_{u=-v}^{u=v} = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)\int_0^1 dv\, v = \frac{1}{8}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

Esercizio 4. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma (x^3 - 2y)dx + (x + y)dy,$$

dove $\Gamma = \partial A^+$ è la curva al bordo dell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le 1 + \sqrt{2y - y^2}\}$ percorsa in senso antiorario.

Risoluzione <u>*motivata*</u>*:* Dal teorema di Gauss-Green si ha

$$\int_{\partial A^+} (x^3 - 2y)dx + (x + y)dy = \iint_A \left(-\frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 2y) + \frac{\partial}{\partial x}(x + y) \right) dxdy = \iint_A 3\, dxdy = 3(\text{area } A),$$

e poiché, come si vede facilmente, A è l'unione del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ e di un quarto della circonferenza di centro $(1, 1)$ e raggio 1, si ha

$$\int_{\partial A^+} (x^3 - 2y)dx + (x + y)dy = 3\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{15\pi}{4}.$$

Esercizio 5. Sviluppare in serie di Taylor in $x = 0$ la funzione

$$f(x) = \frac{1 + 2x^2}{(x+1)(x+3)}$$

e calcolare la derivata $f^{(15)}(0)$.

Risoluzione *motivata:* In base all'algoritmo euclideo di divisione tra polinomi si ha

$$\frac{1 + 2x^2}{(x+1)(x+3)} = 2 - \frac{8x+5}{(x+1)(x+3)},$$

e scomponendo l'ultimo termine in frazioni semplici si ottiene

$$\frac{8x+5}{(x+1)(x+3)} = -\frac{3}{2(x+1)} + \frac{19}{2(x+3)},$$

e pertanto

$$f(x) = 2 + \frac{3}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{19}{2}\frac{1}{x+3}.$$

Le due frazioni nell'ultima espressione possono essere sviluppate in serie di Taylor riconducendole a serie geometriche:

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n, \qquad |x| < 1,$$

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-(-x/3)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x/3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^n, \qquad |x| < 3.$$

Dunque, per l'unicità dello sviluppo di Taylor, lo sviluppo della funzione data è

$$f(x) = 2 + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n - \frac{19}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^n = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(3 - \frac{19}{3^{n+1}}\right)x^n, \qquad |x| < 1.$$

Pertanto

$$f^{(15)}(0) = -\frac{15!}{2}\left(3 - \frac{19}{3^{16}}\right).$$