Esame di Analisi Matematica 2 – 25/2/2013
Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Energetica
A.A. 2012/2013

A

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):... CFU:......

Esercizio 0.
Riportare *esclusivamente la risposta* a ciascuno dei questi a)-d) di sotto. Gli elaborati recanti *più di una risposta errata* in questo esercizio saranno valutati insufficienti. Non verranno tollerati errori di segno, "minori stretti" confusi con "minori o uguali", eccetera.

a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|^{5\alpha}(e^{x^2+y^2}-1)}{\sin^\alpha(x^2+y^2)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

è continua nell'origine.

Risposta: $\alpha > -2/3$.

b) Dire se il punto $(1, \sqrt{2})$ è un punto stazionario per la funzione

$$g(x,y) = xy^2 - x^2 - y^2$$

e, in caso affermativo, stabilirne la natura.

Risposta: sì, sella.

c) Calcolare l'integrale di linea

$$\int_\gamma \frac{ds}{x^2+y^2},$$

dove γ è il segmento che va dal punto $(-2,2)$ al punto $(2,2)$.

Risultato: $\pi/4$.

d) Calcolare l'integrale

$$\iint_D \left(1 + \frac{xe^{-3y^2}}{\sqrt{1+2x^2y^2}}\right) dxdy,$$

dove D è il cerchio unitario centrato nell'origine. (Suggerimento: fare attenzione alle simmetrie della funzione.)

Risultato: π. [Si ha $\iint_D \frac{xe^{-3y^2}}{\sqrt{1+2x^2y^2}} dxdy = 0$ poiché la funzione è dispari in x e il dominio è simmetrico per $x \mapsto -x$.]

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):.. CFU:......

Esercizio 1. Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$$

nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,4)$ e $(4,0)$.

Risoluzione *motivata:* Poiché il triangolo (chiuso) T di vertici $(0,0)$, $(0,4)$ e $(4,0)$ è compatto e la f è evidentemente continua, esistono $\max_T f$ e $\min_T f$, e sono dati dal massimo e minimo dei valori assunti da f nei suoi punti critci all'interno di T, o in quelli vincolati ai lati di ∂T, o nei vertici di T.
I punti critici all'interno di T si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = xy(2-x)e^{-(x+y)} = 0 \\ f_y(x,y) = x^2(1-y)e^{-(x+y)} = 0, \end{cases}$$

che ha il punto $(2,1)$ come unica soluzione all'interno di T (i punti $(0,y)$, pure soluzioni del sistema, sono sul bordo o all'esterno di T), e si ha $f(2,1) = 4e^{-3}$.
Essendo poi $f(0,y) = 0 = f(x,0)$, si vede che f è nulla su due dei due lati di ∂T (i segmenti $[(0,0),(0,4)]$ e $[(0,0),(4,0)]$). Resta dunque soltanto da studiarla sul segmento $[(0,4),(4,0)]$, che ha equazione cartesiana $y = 4-x$, $x \in [0,4]$. Bisogna pertanto determinare gli estremi della funzione

$$g(x) := f(x, 4-x) = x^2(4-x)e^{-4}, \qquad x \in [0,4].$$

Si ha allora $g'(x) = [2x(4-x) - x^2]e^{-4} = x(-3x+8)e^{-4}$, dallo studio del segno della quale si vede subito che la funzione g, nell'intervallo $[0,4]$, ha un massimo in $x = 8/3$ in cui assume il valore

$$g(8/3) = f(8/3, 4-8/3) = \frac{256}{27}e^{-4},$$

e minimi in $x = 0$ e $x = 4$ in cui assume il valore $g(0) = f(0,4) = 0 = f(4,0) = g(4)$. Essendo allora $\frac{256}{27}e^{-4} < 4e^{-3}$ (poichè, semplificando, si riduce a $64/27 = (1+1/3)^3 < e$), si conclude che

$$\max_T f = 4e^{-3}, \qquad \min_T f = 0.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):.. CFU:......

Esercizio 2. Data la forma differenziale

$$\omega = \Big(2 + \frac{y^2}{x^2}\Big)dx - \Big(\frac{2y}{x} - 3\Big)dy$$

calcolare l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (e^{\sin^2 t}, \log(2 - \cos t))$ con $0 \le t \le \pi/2$.

Risoluzione *motivata:* L'insieme di definizione di ω è $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \, : \, x = 0\}$ che non è connesso, e quindi nemmeno semplicemente connesso, però è l'unione dei due insiemi semplicemente connessi $D_1 = \{(x, y)\, ; \, x > 0\}$ e $D_2 = \{(x, y) \, : \, x < 0\}$. Osserviamo poi che essendo $e^{\sin^2 t} > 0$ per ogni $t \in [0, \pi/2]$, il sostegno di γ è contenuto in D_1.
Si ha poi che ω è chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(2 + \frac{y^2}{x^2}\Big) = \frac{2y}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(- \frac{2y}{x} + 3\Big),$$

e dunque ω è esatta su D_1. Pertanto, detta f una primitiva di ω su D_1, si avrà

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(\pi/2)) - f(\gamma(0)) = f(e, \log 2) - f(1, 0).$$

Non resta allora che da calcolare f. Si ha

$$f(x, y) = \int \Big(- \frac{2y}{x} + 3\Big)dy = -\frac{y^2}{x} + 3y + g(x),$$

e pertanto

$$f_x(x, y) = \frac{y^2}{x^2} + g'(x) = 2 + \frac{y^2}{x^2},$$

da cui $g(x) = 2x + c$, e

$$f(x, y) = -\frac{y^2}{x} + 3y + 2x + c \Rightarrow \int_\gamma \omega = -\frac{\log^2 2}{e} + 3\log 2 + 2e - 2.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):... CFU:......

Esercizio 3. Determinare le singolarità isolate della funzione

$$g(z) = \frac{e^z - 1}{3z(z^2+1)}$$

e calcolarne i residui.

Risoluzione <u>*motivata*</u>*:* La funzione data è olomorfa in $\mathbb{C}$ privato dei punti $z = 0, \pm i$ in cui si annulla il denominatore, che sono quindi le singolarità isolate di g.
Utilizzando lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale in un intorno di $z = 0$ si ha

$$g(z) = \frac{1}{3(z^2+1)} \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{3(z^2+1)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}, \qquad z \neq 0,$$

e poiché la funzione $z \mapsto \frac{1}{3(z^2+1)}$ è olomorfa in un intorno di $z = 0$ si vede che g ha uno sviluppo di Laurent senza parte singolare in $z = 0$, cioè $z = 0$ è una singolarità eliminabile di g e $\operatorname{Res} g|_{z=0} = 0$.
Si ha poi

$$g(z) = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{e^z - 1}{3z(z+i)},$$

e poiché $z \mapsto \frac{e^z-1}{3z(z+i)}$ è olomorfa in un intorno di $z = i$ avrà uno sviluppo di Taylor

$$\frac{e^z - 1}{3z(z+i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-i)^n,$$

da cui si vede che lo sviluppo di Laurent di g in $z = i$ è

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-i)^{n-1} \Rightarrow \operatorname{Res} g|_{z=i} = a_0 = \frac{e^z - 1}{3z(z+i)}\Big|_{z=i} = -\frac{e^i - 1}{6}.$$

Analogamente si calcola $\operatorname{Res} g|_{z=-i} = \frac{e^{-i}-1}{6}$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):.. CFU:......

Esercizio 4. Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\Big(\frac{(-1)^n}{n^x}\Big)$$

dove $x \in [0, \infty)$.

Risoluzione *motivata:* Osservando che il seno è una funzione dispari, si ha che la serie data è

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\Big(\frac{(-1)^n}{n^x}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin\Big(\frac{1}{n^x}\Big),$$

ed è dunque a termini di segno alterno.
Essendo poi, per $n \to +\infty$,

$$\Big|(-1)^n n \sin\Big(\frac{1}{n^x}\Big)\Big| = n \sin\Big(\frac{1}{n^x}\Big) \sim \frac{1}{n^{x-1}},$$

si vede che la serie data converge assolutamente se e solo se $x > 2$, e non coverge per $x \in [0, 1]$ poiché il termine generico non è infinitesimo. Se poi $x \in (1, 2]$, si consideri la funzione $g(t) := t \sin(1/t^x)$, $t \geq 1$. Si ha

$$g'(t) = \sin\frac{1}{t^x} - \frac{x}{t^x}\cos\frac{1}{t^x} = \frac{1}{t^x}\cos\frac{1}{t^x}\Big(t^x \tan\frac{1}{t^x} - x\Big),$$

e poiché $t^x \tan(1/t^x) \to 1 < x$ per $t \to +\infty$ e $\cos(1/t^x) > 0$ per t sufficientemente grande, si vede che g è definitivamente monotona decrescente per $t \to +\infty$. Dunque, per il teorema di Leibniz, la serie data converge semplicemente (ma non assolutamente) per $x \in (1, 2]$. (La stessa conclusione si otterrebbe più semplicemente dall'andamento asintotico $(-1)^n n \sin(1/n^x) \sim (-1)^n/n^{x-1}$, però la discussione di sopra è necessaria per poter utilizzare la stima del resto di Leibniz per studiare la convergenza uniforme, vedere sotto.)
Usando la diseguaglianza $|\sin t| \leq |t|$, si ha poi

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} \Big|(-1)^n n \sin\Big(\frac{1}{n^x}\Big)\Big| \leq \sup_{x\in[a,+\infty)} \frac{1}{n^{x-1}} = \frac{1}{n^{a-1}},$$

da cui si ottiene la convergenza totale (e quindi uniforme) della serie in ogni intervallo $[a, +\infty)$ con $a > 2$. Invece la serie non può convergere totalmente in nessun insieme che abbia $x = 2$ come punto di accumulazione, poiché altrimenti, essendo una serie di funzioni continue, convergerebbe assolutamente in $x = 2$, cosa esclusa sopra.
Infine la stima del resto del teorema di Leibniz fornisce

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} \Big|\sum_{n=m+1}^{+\infty} (-1)^n n \sin\Big(\frac{1}{n^x}\Big)\Big| \leq \sup_{x\in[a,+\infty)} \Big\{(m+1)\sin\Big(\frac{1}{(m+1)^x}\Big)\Big\} = (m+1)\sin\Big(\frac{1}{(m+1)^a}\Big)$$

(la funzione $x \mapsto \sin(1/(m+1)^x)$ è monotona decrescente se $1/(m+1)^x < \pi/2$, il che sicuramente si verifica per $x > 1$ se m è sufficientemente grande). Poiché allora l'ultimo membro è infinitesimo per $m \to +\infty$ se $a > 1$, si conclude che la serie data converge uniformemente in ogni intervallo del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 1$, mentre non coverge uniformemente in nessun insieme che abbia $x = 1$ come punto di accumulazione, poiché altrimenti convergerebbe per $x = 1$.