Esame di Analisi Matematica 2 – 11/2/2013 **A**
Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Energetica
A.A. 2012/2013

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):..

Esercizio 1a. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}.$$

Risposta: $\nexists$

Esercizio 1b. Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 y \cos^2(xy^3),$$

calcolare $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0)$.

Risposta: 2

Esercizio 1c. Data la curva $\gamma(t) := (t^2 \cos t, t \sin t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, calcolare il versore tangente a γ nel punto $(-\pi^2, 0, \pi^3)$.

Risultato:

$$\frac{\gamma'(\pi)}{\|\gamma'(\pi)\|} = \frac{(-2, -1, 3\pi)}{\sqrt{5 + 9\pi^2}}.$$

Esercizio 1d. Esprimere, se possibile, l'insieme

$$\Omega := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \le 3, x \ge \frac{1}{2}(y^2 + z^2)\right\}$$

sotto forma di insieme normale rispetto a uno dei piani coordinati.

Risultato:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (y,z) \in D, \, \frac{1}{2}(y^2 + z^2) \le x \le \sqrt{3 - y^2 - z^2}\},$$
$$D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 + z^2 \le 2\}.$$

(Attenzione, non verranno tollerati errori di segno, "minori stretti" confusi con "minori o uguali", eccetera.)

Esercizio 2. Discutere, al variare del parametro $\alpha \geq 1$, continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\alpha-1}\log(1+3y^2)}{2|x|^3+|y|^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione motivata: Continuità. Essendo chiaramente $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log(1+3y^2)/3y^2 = 1$, basterà studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3|x|^{\alpha-1}y^2}{2|x|^3+|y|^3}.$$

Passando a coordinate polari si ha

$$\frac{3|x|^{\alpha-1}y^2}{2|x|^3+|y|^3} = \rho^{\alpha-2}\frac{3|\cos\theta|^{\alpha-1}\sin^2\theta}{2|\cos\theta|^3+|\sin\theta|^3},$$

da cui si vede che il limite considerato è infinito se $\alpha \in [1,2)$ e non esiste se $\alpha = 2$. Se invece $\alpha > 2$, indicando con $m > 0$ il minimo della funzione (continua e strettamente positiva) $\theta \in [0,2\pi] \mapsto 2|\cos\theta|^3 + |\sin\theta|^3$, si ha

$$\rho^{\alpha-2}\frac{3|\cos\theta|^{\alpha-1}\sin^2\theta}{2|\cos\theta|^3+|\sin\theta|^3} \leq \frac{3}{m}\rho^{\alpha-2} \to 0,$$

e dunque la funzione data è continua per $\alpha > 2$.
Derivabilità. Si ha

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$

e dunque $\exists f_x(0,0) = 0$ per ogni $\alpha \geq 1$, mentre

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ \dfrac{\log(1+3y^2)}{y^4} & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

per cui $\exists f_y(0,0) = 0$ solo se $\alpha > 1$.
Differenziabilità. In base alla definizione, bisogna verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{\alpha-1}\log(1+3y^2)}{(2|x|^3+|y|^3)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Ragionando come per la continuità, si vede che questo equivale a fare il limite di

$$\frac{3|x|^{\alpha-1}y^2}{(2|x|^3+|y|^3)\sqrt{x^2+y^2}} = \rho^{\alpha-3}\frac{3|\cos\theta|^{\alpha-1}\sin^2\theta}{2|\cos\theta|^3+|\sin\theta|^3},$$

e che quindi il limite esiste e vale zero solo se $\alpha > 3$.

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)(x + y - \sqrt{2}), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

discutere la natura dei suoi punti stazionari, e determinarne, se esistono, gli estremi relativi ed assoluti.

Risoluzione motivata: I punti critici di f si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x(x + y - \sqrt{2}) + x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ f_y(x,y) = 2y(x + y - \sqrt{2}) + x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene l'equazione

$$2(x - y)(x + y - \sqrt{2}) = 0$$

che ha le soluzioni $y = x$ e $y = \sqrt{2} - x$. Sostituendo la prima di esse nella prima equazione del sistema si trova l'equazione

$$6x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = 1/\sqrt{2}, \ x = -1/3\sqrt{2},$$

mentre sostituendo la seconda si ha

$$2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = (\sqrt{2}x - 1)^2 = 0 \ \Rightarrow \ x = 1/\sqrt{2}.$$

Si conclude quindi che f ha i due punti critici

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad P_2 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}\right).$$

L'hessiano di f è

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 2y - 2\sqrt{2} & 2(x+y) \\ 2(x+y) & 2x + 6y - 2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

e pertanto

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3}\sqrt{2} & -\frac{2}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{10}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det H(P_2) = \left[\left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]\sqrt{2} > 0,$$

e si conclude che P_2 è un punto di massimo relativo per f. Per quanto riguarda P_1 si ha

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \det H(P_1) = 0,$$

che non dà informazioni sulla natura di P_1. Effettuando però lo studio del segno di f, che è il prodotto di un polinomio di primo grado e di uno di secondo, si vede facilmente che P_1 è un punto di sella.
Infine essendo $f(x,x)$ un polinomio di terzo grado, si ha $\lim_{x \to \pm\infty} f(x,x) = \pm\infty$, e dunque f non ha massimi né minimi assoluti.

Esercizio 4. Calcolare l'integrale

$$\iint_D \frac{y}{3+x^2+y^2} dxdy,$$

dove D è la parte del semipiano $\{(x,y) : x \geq y\}$ compresa tra le circonferenze di raggio 1 e 2 centrate nell'origine.

Risoluzione <u>*motivata*</u>*:* L'insieme di integrazione D si descrive facilmente in coordinate polari:

$$D' = \{(\rho,\theta) : 1 \leq \rho \leq 2, -3\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4\},$$

pertanto l'integrale da calcolare diventa

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{y}{3+x^2+y^2} dxdy &= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_1^2 d\rho \, \frac{\rho^2 \sin\theta}{3+\rho^2} = [-\cos\theta]_{-3\pi/4}^{\pi/4} \int_1^2 d\rho \left(1 - \frac{3}{3+\rho^2}\right) \\
&= -\sqrt{2}\left([\rho]_1^2 - \sqrt{3}\int_1^2 d\left(\frac{\rho}{\sqrt{3}}\right) \frac{1}{1+\left(\frac{\rho}{\sqrt{3}}\right)^2} \right) \\
&= \sqrt{6}\left(\arctan(2/\sqrt{3}) - \arctan(1/\sqrt{3})\right) - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5. Discutere la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4n+1}{4n}\right)^{n^2} (x-1)^{2n}.$$

Risoluzione motivata: Effettuando la sostituzione $y = (x-1)^2$, la serie data si riduce alla serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4n+1}{4n}\right)^{n^2} y^n.$$

Il raggio di convergenza di quest'ultima si determina calcolando

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n+1}{4n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4n+1}{4n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{4n}\right)^n = e^{1/4},$$

e pertanto il raggio di convergenza è $R = e^{-1/4}$. Bisogna poi verificare il comportamento della serie negli estremi dell'intervallo di convergenza $y = \pm e^{-1/4}$. Sostituendo $y = e^{-1/4}$ si ottiene la serie numerica di termine generico

$$\begin{aligned}\left(\frac{4n+1}{4n}\right)^{n^2} e^{-n/4} &= \exp\left(n^2 \log(1+1/4n) - n/4\right) = \exp\left(n^2(1/4n - 1/32n^2 + o(1/n^2)) - n/4\right) \\ &= \exp(-1/32 + o(1)) \to e^{-1/32} \neq 0 \qquad \text{per } n \to +\infty,\end{aligned}$$

che quindi non è convergente. Analogamente per $y = -e^{-1/4}$. Pertanto in base ai teoremi sulla convergenza delle serie di potenze, e tornando alla variabile x, si ha che la serie data converge puntualmente nell'intervallo $I = (1-e^{-1/8}, 1+e^{-1/8})$ e converge totalmente in ogni intervallo $[a,b]$ in esso contenuto, mentre non converge totalmente né uniformente in tutto I, in quanto altrimenti convergerebbe anche agli estremi.