Note del corso di
Fondamenti di Analisi Matematica

Anno Accademico 2012-13
Corso di Laurea Triennale in Fisica
Università di Roma Tor Vergata

Gerardo Morsella[1]

28 febbraio 2014

[1]Università di Roma Tor Vergata, Dipartimento di Matematica, viale della Ricerca Scientifica 1, I-00133 Roma, Italy, E-mail: morsella@mat.uniroma2.it

Indice

Introduzione

Il titolo, in realtà un po' generico, di questo corso è dovuto a motivi storici legati all'organizzazione del corso di laurea in Fisica di Tor Vergata, che si è andata modificando lungo gli anni. Questo ha significato in particolare che si facesse meno pressante la necessità di un corso di "dimostrazioni" che gli studenti più interessati agli aspetti matematici potessero affiancare ai corsi di "calcolo" dei primi anni, che attualmente già offrono presentazioni decisamente rigorose. La maggiore libertà che ne è conseguita ha permesso che si potessero affrontare in questo corso argomenti di Analisi più avanzati, in grado di introdurre gli studenti più motivati ai metodi moderni della Fisica Matematica in generale, e della studio rigorso della Meccanica Quantistica in particolare. L'artefice di questo mutamento è stato il prof. John Roberts, che ha tenuto il corso fino allo scorso anno accademico. Non mi sono quindi ovviamente azzardato ad andare contro la tradizione.

Lo scopo del corso è pertanto quello di fornire un'introduzione a tutta una serie di strumenti matematici che si sono rivelati di fondamentale importanza nello studio rigoroso dei problemi che nascono dalla Meccanica Quantistica e dalla Teoria Quantistica dei Campi. Tali strumenti sono costituiti essenzialmente dalla teoria degli spazi di Hilbert infinito-dimensionali e degli operatori (limitati e non) su di essi, il che conduce in modo assolutamente naturale allo studio delle C*-algebre, commutative e non. Queste intervengono in primo luogo come la giusta cornice in cui inquadrare la teoria spettrale degli operatori – di ovvio interesse per la Meccanica Quantistica –, ma ci si rende poi presto conto del fatto che il loro ruolo è molto più generale, e consente da una parte una formulazione assiomatica chiara della Meccanica Quantistica stessa, e dall'altra fornisce una grande mole di risultati sulla sua struttura che sarebbe difficile ottenere altrimenti. Questo è ancora più vero se si considera la Teoria Quantistica dei Campi, dove l'impiego di metodi algebrici si è rivelato pressoché imprescindibile nello studio di problemi strutturali, e recentemente ha permesso di ottenere nuovi risultati anche nello studio di modelli concreti. Quindi, sebbene ovviamente questi non rientrino tra i temi trattati nel corso, ho ritenuto che fornire agli studenti una introduzione alle C*-algebre potesse tornar loro utile se in futuro vorranno approfondire la conoscenza di questi campi, che sono attualmente oggetto di ricerca in rapido sviluppo.

Sfortunamente la preparazione matematica di base degli studenti di Fisica delle moderne lauree triennali non contempla i fondamenti dell'Analisi Funzionale, cioè le nozioni di base su spazi normati, metrici e topologici, o la teoria dell'integrazione alla Lebesgue. Pertanto anche questi argomenti, preliminari rispetto a quelli citati sopra, sono oggetto del corso, sebbene limitatamente agli enunciati dei teoremi fondamentali per quanto riguarda la teoria dell'integrazione. Si assume invece come prerequisito la teoria delle funzioni di variabile complessa, che gli studenti di Fisica apprendono all'inizio del terzo anno. Inoltre, per cercare di convincere i miei studenti che tutta la fatica fatta per impadronirsi di questi strumenti non è completamente sprecata, ho incluso nel programma alcune applicazioni alla Meccanica Quantistica: la sua formulazione assiomatica, la caratterizzazione dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà in termini dell'algebra di Weyl, e lo studio delle hamiltoniane della particella libera e dell'oscillatore armonico.

Ovviamente esistono molti ottimi testi su tutti questi temi, e alcuni di essi – quelli su cui mi sono maggiormente basato per preparare le lezioni – sono citati nella bibliografia, assolutamente non esaustiva, per non dire decisamente minimale, di queste note. Ma non è facile indicarne uno dove si trovino tutti insieme, e che non contenga al tempo stesso troppe altre cose, rischiando così di risultare dispersivo per uno studente alle prime armi. Il tentativo di fornire ai miei studenti un unico riferimento è stato quindi il motivo principale che mi ha spinto a scrivere queste note, sperando inoltre che risultino loro utili per orientarsi nel grande mare della letteratura, e li incoraggino e incuriosiscano ad approfondirne la conoscenza.

Ho infine inserito in coda ad ogni capitolo un certo numero di esercizi, proposti anche durante le lezioni. Nella maggior parte dei casi la loro soluzione, spesso non difficile, fornisce la dimostrazione di risultati ausiliari a quelli dimostrati nelle note, o ad essi complementari. Quelli più impegnativi sono segnalati da un asterisco (*). Gli studenti sono caldamente incoraggiati a cercare di risolverli *tutti*: non si ripeterà mai abbastanza che l'unico modo per imparare la Matematica, e la Scienza in generale, è farla.

Capitolo 1

Spazi normati, metrici e topologici

1.1 Nozioni di base

Come è noto dal corso di Meccanica Quantistica, gli stati di un sistema quantistico possono essere descritti da certe funzioni ψ di $3n$ variabili reali (se n è il numero di particelle del sistema), le *funzioni d'onda*, e l'insieme di tali funzioni forma uno spazio vettoriale (su $\mathbb{C}$), cioè la somma di due funzioni d'onda, o il prodotto di una funzione d'onda per un numero complesso, sono ancora funzioni d'onda. In tale spazio vettoriale, detto *spazio di Hilbert*, si ha una nozione naturale, e fisicamente significativa, di "grandezza", di una funzione, definita come

$$\|\psi\| = \left(\int_{\mathbb{R}^{3n}} |\psi(x)|^2 d^{3n}x \right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

Noi studieremo in dettaglio gli spazi di Hilbert nel capitolo 3. Più in generale, in moltissimi problemi di Analisi avanzata si è condotti in modo naturale a considerare spazi vettoriali (reali o complessi) infinito-dimensionali di funzioni (o di oggetti più generali) in cui è definita una nozione di "grandezza" degli elementi che ha proprietà formali analoghe a quelle di cui gode la (1.1). Sorge quindi la necessità di identificare gli aspetti comuni a tutti questi casi, il che porta a introdurre la nozione astratta di *spazio normato*, che inizieremo a studiare in questo capitolo. In tutto quello che segue, indicheremo con $\mathbb{K}$ uno dei campi $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definizione 1.1. Sia X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Una *norma* su X è un'applicazione $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ tale che, per ogni $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

(i) $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (*omogeneità della norma*);

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*disuguaglianza triangolare*).

La coppia $(X, \|\cdot\|)$ è detta uno *spazio normato*.

Con un abuso di linguaggio comune, che adotteremo per altre situazioni simili che si presenteranno in seguito, diremo anche semplicemente "X è uno spazio normato", senza specificare quale norma si consideri su di esso, quando non ci sia dubbio su quest'ultima.

Le proprietà (i)-(iii) della definizione, come si vede, dicono come la norma si comporta rispetto alle operazioni che definiscono la struttura di spazio vettoriale di X. Notiamo anche esplicitamente che dalla (ii) di sopra segue chiaramente che $\|0\| = \|0 \cdot x\| = 0$, e dunque il vero contenuto della (i) è che vale il viceversa: se $\|x\| = 0$ allora necessariamente $x = 0$.

Esempi 1.2. (a) Considerato $X = \mathbb{K}^n$, è noto che ponendo

$$\|x\|_2 := |x| := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}, \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

si ottiene una norma su X, detta *norma euclidea*.

(b) Sempre su $X = \mathbb{K}^n$, è immediato verificare che si ottengono altre norme ponendo

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &:= \sum_{k=1}^n |x_k|, \\ \|x\|_\infty &:= \max_{k=1,\dots,n} |x_k|, \end{aligned} \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

(c) Sia T un insieme arbitrario, e si consideri lo spazio

$$X := \ell^\infty(T, \mathbb{K}) := \{f : T \to \mathbb{K} \,:\, f \text{ è limitata su } T\},$$

che è, come si verifica facilmente, un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con le operazioni definite puntualmente:

$$(f+g)(t) := f(t) + g(t), \quad (\alpha f)(t) = \alpha f(t), \qquad f, g \in X,\ \alpha \in \mathbb{K},\ t \in T.$$

Definendo allora

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in T} |f(t)|, \qquad f \in X,$$

si ottiene una norma su X. Infatti: (i) se $\sup_{t\in T} |f(t)| = 0$ allora $f(t) = 0$ per ogni $t \in T$, e dunque $f = 0$ come elemento di X; (ii) dalla definizione di αf si ha $\|\alpha f\|_\infty = \sup_{t\in T} |\alpha f(t)| = |\alpha| \sup_{t\in T} |f(t)| = |\alpha| \|f\|_\infty$; (iii) dalla definizione di $f + g$ e di $\|\cdot\|_\infty$ segue, per ogni $t \in T$, $|(f+g)(t)| = |f(t) + g(t)| \le |f(t)| + |g(t)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, e dunque, prendendo l'estremo superiore su $t \in T$ del primo membro, $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Poiché considereremo con più frequenza il caso complesso, per semplicità porremo $\ell^\infty(T) := \ell^\infty(T, \mathbb{C})$.

(d) Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo compatto, e si consideri lo spazio $X = C([a, b], \mathbb{K})$ delle funzioni continue su $[a, b]$ a valori in $\mathbb{K}$, con le operazioni di spazio vettoriale definite puntualmente come nell'esempio precedente. Per il teorema di Weierstrass si ha allora che X è un sottospazio vettoriale di $\ell^\infty([a, b], \mathbb{K})$, e dunque la norma $\|\cdot\|_\infty$, ristretta a X, fornisce chiaramente una norma su X. Anche in questo caso si porrà $C([a, b]) := C([a, b], \mathbb{C})$.

(e) Sempre su $X = C([a,b],\mathbb{K})$ con le operazioni puntuali, si può definire

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|dt, \qquad f \in X,$$

e si ottiene ancora una norma. L'unica proprietà di verifica non immediata è la (i): sia $\|f\|_1 = 0$ e supponiamo, per assurdo, che esista $t_0 \in [a,b]$ tale che $f(t_0) \neq 0$. Allora, essendo f continua esisterà un $\delta > 0$ tale che $|f(t)| > |f(t_0)|/2$ per ogni $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta) \cap [a,b]$. Da questo segue, per la monotonia dell'integrale, e indicando con $|I|$ la lunghezza del generico intervallo $I \subset \mathbb{R}$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt \geq \int_{(t_0-\delta,t_0+\delta)\cap[a,b]} |f(t)|dt \geq \frac{|f(t_0)|}{2}\big|(t_0-\delta, t_0+\delta) \cap [a,b]\big| > 0,$$

che contraddice l'ipotesi $\|f\|_1 = 0$.

(f) Ancora su $X = C([a,b],\mathbb{K})$ possiamo definire una terza norma come

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}, \qquad f \in X.$$

La verifica che $\|\cdot\|_2$ gode della proprietà (i) è del tutto analoga a quella dell'esempio precedente. La verifica di (ii) è immediata. Per verificare (iii), utilizzeremo fatti che dimostreremo (in modo indipendente da quanto fatto qui), nel capitolo 3 sugli spazi di Hilbert. In particolare, limitandosi al caso, per noi più importante, in cui $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (il caso di funzioni reali è del tutto analogo), si vede facilmente che l'applicazione $(f,g) \in X \times X \mapsto \int_a^b \overline{f(t)}g(t)\,dt$ è un prodotto scalare, definizione 3.1. Da questo segue, per il teorema 3.2, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\left|\int_a^b \overline{f(t)}g(t)\,dt\right| \leq \|f\|_2\|g\|_2, \qquad f,g \in X.$$

Date allora $f,g \in X$, e ricordando che per $z \in \mathbb{C}$ si ha $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, si ottiene

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2^2 &= \int_a^b \big(|f(t)|^2 + |g(t)|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\overline{f(t)}g(t))\big)dt \\ &= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\mathrm{Re}\int_a^b \overline{f(t)}g(t)\,dt \leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2.\end{aligned}$$

Questa norma coincide con quella dell'equazione (1.1) con cui abbiamo iniziato. Vedremo però, nell'esempio 1.36(d), che $C([a,b],\mathbb{C})$, con questa norma, *non* è uno spazio di Hilbert.

In $\mathbb{R}^n$, la norma euclidea $|\cdot|$ è utilizzata principalmente per calcolare la distanza tra due punti $x,y \in \mathbb{R}^n$, definita come la lunghezza del vettore che li unisce: $d(x,y) := |x-y| = (\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2)^{1/2}$. Anche in questo caso, come in quello della norma, risulta utile, per trattare casi più complicati, generalizzare questa nozione astraendone le proprietà fondamentali.

Definizione 1.3. Sia X un insieme. Una *metrica* su X è un'applicazione $d : X \times X \to [0, +\infty)$ tale che, per ogni $x, y, z \in X$:

(i) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (*simmetria della metrica*);

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*disuguaglianza triangolare*).

La coppia (X, d) è detta uno *spazio metrico*.

Come ci si può aspettare da quanto detto prima della definizione, una classe generale di esempi di spazi metrici si ottiene considerando, per un dato spazio normato $(X, \|\cdot\|)$, la metrica su X definita da

$$d(x, y) := \|x - y\|, \qquad x, y \in X. \tag{1.2}$$

Che la d così definita sia effettivamente una metrica è di facile verifica: (i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$ per la (i) della definizione 1.1; (ii) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$ per la (ii) della definizione 1.1; (iii) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$ per la (iii) della definizione 1.1. Nel caso particolare $X = \mathbb{R}^n$, la metrica indotta dalla norma euclidea sarà detta *metrica euclidea*. Viceversa, non ogni metrica si ottiene da una norma tramite la (1.2), e anzi a priori l'insieme X su cui è definita non è necessariamente uno spazio vettoriale. Un semplice esempio in questo senso è fornito nell'esercizio 1.1 alla fine del capitolo.

Dato uno spazio metrico (X, d), una nozione di fondamentale importanza è quella di *palla aperta* di centro $x \in X$ e raggio $\delta > 0$, che è il sottoinsieme di X definito da

$$B_\delta(x) := \{y \in X \,:\, d(x, y) < \delta\}.$$

Usando tali insiemi si può dare un senso preciso alla nozione intuitiva di "vicinanza" tra punti di X, o di "intorno" di un punto di X. Come vedremo, però, metriche diverse su uno stesso spazio X possono dare luogo a nozioni di "vicinanza" coincidenti. È allora utile fare un ulteriore passaggio di astrazione, e introdurre la nozione di *topologia*. Nella definizione seguente $\mathscr{P}(X)$ denota l'*insieme delle parti di* X, cioè l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi.

Definizione 1.4. Sia (X, d) uno spazio metrico. Un insieme $A \subset X$ è detto *aperto* se è vuoto, o se per ogni $x \in A$ esiste un $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x) \subset A$. La collezione $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ di tutti gli insiemi aperti è detta la *topologia indotta dalla metrica* d.

La definizione precedente è chiaramente una generalizzazione ad un arbitrario spazio metrico della nozione di sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla metrica euclidea. La topologia di $\mathbb{R}^n$ indotta dalla metrica euclidea sarà detta la *topologia usuale* di $\mathbb{R}^n$. Le proprietà fondamentali degli insiemi aperti di un generico spazio metrico sono date dal seguente risultato.

Proposizione 1.5. *Sia (X, d) uno spazio metrico, e τ la topologia indotta da d. Si ha:*

(i) $\emptyset, X \in \tau$;

(ii) *se* $A_\alpha \in \tau$ *per ogni* $\alpha \in I$, *I insieme di indici arbitrario, allora* $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in \tau$ *(unioni arbitrarie di aperti sono aperte);*

(iii) *se* $A_1, \dots, A_n \in \tau$, *allora* $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$ *(intersezioni finite di aperti sono aperte).*

Dimostrazione. (i) $\emptyset \in \tau$ per definizione, e $X \in \tau$ poichè contiene tutte le palle aperte.

(ii) Se tutti gli A_α sono vuoti, anche la loro unione lo è, e quindi è aperta. Altrimenti, se $x \in \bigcup_\alpha A_\alpha$, deve essere $x \in A_\alpha$ per qualche $\alpha \in I$, e dunque esiste una palla aperta $B_\delta(x) \subset A_\alpha \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$.

(iii) Se esiste $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n$, devono esistere palle aperte $B_{\delta_j}(x) \subset A_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Ma posto allora $\delta := \min_{j=1,\dots,n} \delta_j$ si avrà $B_\delta(x) \subset B_{\delta_j}(x)$ per ogni j, e dunque $B_\delta(x) \subset A_1 \cap \dots \cap A_n$. □

Nelle proprietà (i)-(iii) della proposizione precedente non appare mai esplicitamente la metrica d. È allora naturale porre la definizione seguente.

Definizione 1.6. Sia X un insieme. Una *topologia* su X è una famiglia τ di sottoinsiemi di X per la quale valgano le proprietà (i)-(iii) della proposizione 1.5. Gli elementi $A \in \tau$ sono detti *(insiemi) aperti di* X, e la coppia (X, τ) è detta uno *spazio topologico*.

La nozione di spazio topologico è chiaramente piuttosto astratta, ma vedremo nel capitolo **??** che spazi topologici la cui topologia non è definita da una metrica sorgono in modo naturale da problemi più concreti, che costituiscono il fondamento della teoria spettrale degli operatori su uno spazio di Hilbert, di ovvio interesse per la Fisica. Per questo motivo studieremo ora gli aspetti fondamentali della teoria degli spazi topologici.

Accanto agli insiemi aperti, si definiscono ovviamente quelli *chiusi*: $C \subset X$ è chiuso se $C^c := X \setminus C$ è aperto. Le proprietà fondamentali degli insiemi chiusi, "duali" rispetto a quelle degli insiemi aperti, sono date dall'esercizio 1.5 (la cui soluzione richiede l'esercizio 1.4).

Un'altra nozione fondamentale quando si considerano spazi topologici è quella di *intorno* di un punto.

Definizione 1.7. Siano X uno spazio topologico e $x \in X$. Un insieme $U \subset X$ è detto un *intorno di* x se esiste un aperto $A \subset X$ tale che $x \in A \subset U$.

Indicheremo con $\mathscr{I}_x$ la famiglia di tutti gli intorni di $x \in X$. Chiaramente un insieme aperto $A \subset X$ è intorno di ogni suo punto, e viceversa se A è intorno di ogni suo punto è aperto, in quanto è unione di una famiglia $\{A_x : x \in A\}$ di insiemi aperti tali che $x \in A_x \subset A$. Una sottofamiglia $\mathscr{B}_x \subset \mathscr{I}_x$ è detta una *base di intorni* di x se per ogni U intorno di x esiste un $B \in \mathscr{B}_x$ tale che $B \subset U$. Può essere in generale difficile descrivere esplicitamente tutti gli intorni di un punto in una data topologia, ma spesso è facile descrivere una base di intorni. Ad esempio se la topologia è indotta da una metrica, basi di intorni notevoli sono date dall'esercizio 1.6.

La definizione seguente identifica una sottoclasse di spazi topologici con la quale avremo a che fare pressoché esclusivamente.

Definizione 1.8. Uno spazio topologico X è detto *di Hausdorff* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ con $x \neq y$, esistono intorni $U \in \mathscr{I}_x$ e $V \in \mathscr{I}_y$ tali che $U \cap V = \emptyset$.

Cioè brevemente: X è di Hausdorff se ogni coppia di punti distinti ha intorni disgiunti.

Proposizione 1.9. *Sia (X, d) uno spazio metrico. La topologia indotta da d è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$ distinti. Allora $d(x, y) > 0$, e si può quindi trovare $\delta > 0$ tale che $\delta < \frac{1}{2}d(x, y)$. Da questo segue $B_\delta(x) \cap B_\delta(y) = \emptyset$: se esistesse $z \in B_\delta(x) \cap B_\delta(y)$, si avrebbe, per la disuguaglianza triangolare,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2\delta < d(x, y),$$

il che è assurdo. Essendo allora $B_\delta(x) \in \mathscr{I}_x$, $B_\delta(y) \in \mathscr{I}_y$ come conseguenza dell'esercizio 1.2, si ha la tesi. $\square$

Non tutti gli spazi topologici sono di Hausdorff (e quindi non tutte le topologie sono indotte da una metrica): un semplice esempio è dato dall'esercizio 1.7.

Un'ulteriore nozione importante è quella di chiusura di un'insieme.

Definizione 1.10. Siano X uno spazio topologico e $B \subset X$ un insieme. La *chiusura di B* è l'insieme $\bar{B}$ definito come l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi di X contenenti B.

Chiaramente si ha $B \subset \bar{B}$, e $\bar{B}$, essendo intersezione di chiusi, è chiuso. Dunque $C \subset X$ è chiuso se e solo se $\bar{C} \subset C$. La proposizione seguente fornisce un'utile caratterizzazione della chiusura di un insieme in uno spazio topologico.

Proposizione 1.11. *Dato $B \subset X$, si ha $x \in \bar{B}$ se e solo se per ogni U intorno di x si ha $U \cap B \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \bar{B}$ e si supponga, per assurdo, che esista un intorno U di x disgiunto da B. Ovviamente si può suppore che U sia aperto, passando, se occorre, ad un suo sottoinsieme. Ma allora U^c è un chiuso che contiene B ma non x, il che è assurdo per la definizione di $\bar{B}$.

Viceversa supponiamo che per ogni intorno U di x si abbia $U \cap B \neq \emptyset$, e sia, sempre per assurdo, $C \supset B$ un chiuso che non contiene x. Ne segue che x appartiene all'aperto $U = C^c$ che è quindi un intorno di x disgiunto da B, contro l'ipotesi. $\square$

Ovviamente la nozione "duale" a quella di chiusura è quella di *interno* di un insieme $B \subset X$, che è l'insieme $\mathring{B}$ definito come l'unione di tutti gli aperti $A \subset B$.

Definizione 1.12. Siano X uno spazio topologico e $B \subset X$ un insieme. Un punto $x \in X$ è detto un *punto di accumulazione* per B se per ogni U intorno di x si ha $(U \cap B) \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

Detto in breve: x è di accumulazione per B se ogni suo intorno contiene punti di B diversi da x stesso. È chiaro, in base alla proposizione 1.11, che un punto di accumulazione per B sta in $\bar{B}$, ma il viceversa non è vero in generale: ad esempio se si considera, in $\mathbb{R}^2$ con la topologia usuale, l'insieme $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(2,0)\}$, il punto $(2,0)$ sta in B e quindi in $\bar{B}$, ma non è di accumulazione poichè ad esempio il suo intorno $B_{1/2}((2,0))$ ha intersezione vuota con $B \setminus \{(2,0)\}$.

1.2 Limiti e continuità

Uno dei maggiori vantaggi garantiti dall'introduzione di spazi topologici, è quello di consentire una formulazione molto generale della nozione di limite di successioni e di funzioni. Per iniziare a familiarizzarci con questi concetti, cominciamo con il caso più semplice, quello di limite di una successione, cioè di una funzione $x : \mathbb{N} \to X$ (X spazio topologico), che si indica comunemente con il simbolo $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ o, per brevità, semplicemente con (x_j).

Definizione 1.13. Siano X uno spazio topologico e $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione. Si dice che $x \in X$ è un limite della successione (x_j), e si scrive

$$x \in \lim_{j\to+\infty} x_j, \quad \text{o anche} \quad x_j \to x,$$

se per ogni intorno U di x esiste $j_U \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $j \geq j_U$, si ha $x_j \in U$.

Si noti che in generale una successione può avere più di un limite. Vedremo però, come conseguenza della proposizione 1.19, che se X è uno spazio di Hausdorff una successione ha al più un limite, nel qual caso si scrive $x = \lim_{j\to+\infty} x_j$. In particolare questo sarà vero per successioni in uno spazio metrico (X,d). In questo caso, inoltre, usando il fatto che gli insiemi $B_\delta(x)$, $\delta > 0$, formano una base di intorni di x (esercizio 1.6), si vede facilmente che $x_j \to x$ se e solo se $d(x_j, x) \to 0$ come successione in $\mathbb{R}$: se $x_j \to x$, dato $\delta > 0$ deve esistere $j_\delta = j_{B_\delta(x)} \in \mathbb{N}$ tale che se $j \geq j_\delta$ si ha $x_j \in B_\delta(x)$, e cioè $d(x_j,x) < \delta$, da cui $d(x_j,x) \to 0$; viceversa se $d(x_j,x) \to 0$, dato un intorno U di x esisterà $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x) \subset U$ e $j_\delta \in \mathbb{N}$ tale che se $j \geq j_\delta$ allora $d(x_j,x) < \delta$, e basta allora prendere $j_U = j_\delta$. Il risultato seguente caratterizza le chiusure degli insiemi in uno spazio metrico tramite limiti di successioni.

Teorema 1.14. *Siano (X,d) uno spazio metrico, e $B, C \subset X$ insiemi. Si ha*

(i) $x \in \bar{B}$ se e solo se esiste una successione $(x_j) \subset B$ tale che $x_j \to x$;

(ii) C è chiuso se e solo se per ogni successione $(x_j) \subset C$ che sia convergente ad un $x \in X$, si ha $x \in C$.

Dimostrazione. (i) Sia $x \in \bar{B}$. Poiché $B_{1/j}(x)$ è un intorno di x, per la proposizione 1.11 esisterà $x_j \in B_{1/j}(x) \cap B$, da cui $d(x_j,x) < 1/j$, e quindi $x_j \to x$ per l'osservazione precedente. Viceversa se $(x_j) \subset B$ converge a x, dato U intorno di x si ha $x_j \in U \cap B$ per $j \geq j_U$, e dunque $x \in \bar{B}$.

(ii) C è chiuso se e solo se $\bar{C} \subset C$, e questo, per il punto (i), è equivalente a dire che se $(x_j) \subset C$ è un successione convergente a un $x \in X$, si ha $x \in C$. □

Poiché allora dare una topologia su X significa dare la collezione degli insiemi aperti o, equivalentemente, quella degli insiemi chiusi, loro complementari, si vede che il punto (ii) del teorema precedente implica che la topologia di uno spazio metrico è fissata dalle successioni convergenti, o, in altre parole, che la conoscenza delle successioni convergenti di uno spazio metrico equivale alla conoscenza della sua topologia. Questo non vale invece per uno spazio topologico generale: il punto, come si vede dalla dimostrazione, è che in uno spazio metrico ogni punto ha una base numerabile di intorni, cosa in generale falsa in uno spazio topologico, come mostra l'esempio seguente.

Esempio 1.15. Sia $X = [0,1]$, e su di esso si consideri, invece della topologia usuale, la topologia definita dichiarando che un insieme $C \subset [0,1]$ è chiuso se e solo se è al più numerabile, o $C = [0,1]$. Considerato allora l'insieme (non chiuso) $B = [0,1)$, si avrà $\bar{B} = [0,1]$ (è l'unico chiuso che contiene B). Ma se $(x_n) \subset B$ è una successione, $U := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}^c$ è un aperto (è il complementare di un insieme numerabile, e dunque chiuso) contenente il punto $1 \in \bar{B}$, ed è quindi un suo intorno, ed essendo $x_n \notin U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, (x_n) non converge a 1.

Per ottenere un risultato analogo al teorema 1.14 per uno spazio topologico arbitrario è necessario generalizzare la nozione di successione, che è quanto ci accingiamo a fare.

Definizione 1.16. Sia I un insieme. Una relazione $\leq$ tra coppie elementi di I è detta un *ordine parziale* se per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in I$ si ha

(i) $\alpha \leq \alpha$ (*riflessività*)

(ii) $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$ implica $\alpha = \beta$ (*antisimmetria*);

(iii) $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$ implica $\alpha \leq \gamma$ (*transitività*).

L'ordine parziale $\leq$ è inoltre detto *diretto* se

(iv) per ogni $\alpha, \beta \in I$ esiste $\gamma \in I$ tale che $\alpha, \beta \leq \gamma$.

La coppia $(I, \leq)$ sarà detta un *insieme parzialmente ordinato* se $\leq$ è un ordine parziale, e un *insieme diretto* se $\leq$ è anche diretto.

Notiamo esplicitamente che in generale, dati elementi $\alpha, \beta \in I$, non è detto che debba valere una delle relazioni $\alpha \leq \beta$ o $\beta \leq \alpha$.

Esempi 1.17. (a) $I = \mathbb{N}$ con l'usuale relazione d'ordine tra numeri interi è chiaramente un insieme diretto.

(b) Sia X uno spazio topologico, e, dato $x \in X$ si definisca una relazione $\leq$ nell'insieme $\mathscr{I}_x$ degli intorni di x dichiarando che $U \leq V$ se e solo se $V \subset U$. Si ha allora che $\mathscr{I}_x$ è, con questa relazione, un insieme diretto: la verifica delle proprietà (i)-(iii) è immediata, e per quanto riguarda la (iv) basta notare che dati $U, V \in \mathscr{I}_x$ la loro intersezione $U \cap V$ è ancora un intorno di x ed è contenuta sia in U che in V, e dunque $U, V \leq U \cap V$. In questo esempio esistono chiaramente coppie di elementi $U, V \in \mathscr{I}_x$ che non sono in relazione tra loro.

Un altro esempio interessante è fornito dall'esercizio 1.9(a).

Definizione 1.18. Sia X uno spazio topologico. Un *net* in X è una funzione $x : I \to X$, con I insieme diretto, che si indica comunemente con il simbolo $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, o semplicemente (x_α). Si dice che $x \in X$ è un limite del net (x_α), o che il net (x_α) è convergente a x, e si scrive

$$x \in \lim_{\alpha\in I} x_\alpha, \quad \text{o anche} \quad x_\alpha \to x,$$

se per ogni intorno U di x esiste $\alpha_U \in I$ tale che, per ogni $\alpha \geq \alpha_U$, si ha $x_\alpha \in U$.

È facile vedere che se $I = \mathbb{N}$ si ritrova la nozione di convergenza di una successione, definizione 1.13, e che, per un insieme diretto I generico, $x_\alpha \to x$ se e solo se $d(x_\alpha, x) \to 0$ come net in $\mathbb{R}$ (esercizio 1.10). Un esempio notevole di net convergente è dato dall'esercizio 1.9(b).

Proposizione 1.19. *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff, e $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \subset X$ un net. Se $x, y \in X$ sono limiti di (x_α), allora $x = y$.*

Dimostrazione. Sia, per assurdo, $x \neq y$. Essendo X di Hausdorff, esistono $U \in \mathscr{I}_x$, $V \in \mathscr{I}_y$ disgiunti, e poiché $x_\alpha \to x$ e $x_\alpha \to y$ esisteranno $\alpha_U, \alpha_V \in I$ tale che se $\alpha \geq \alpha_U$ allora $x_\alpha \in U$, e se $\alpha \geq \alpha_V$ allora $x_\alpha \in V$. Ma dal fatto che I è diretto segue che esiste $\bar{\alpha} \geq \alpha_U, \alpha_V$, e dunque $x_{\bar{\alpha}} \in U \cap V$, il che è assurdo. □

Il prossimo teorema mostra che i net svolgono, per uno spazio topologico generale, lo stesso ruolo che le successioni svolgono per gli spazi metrici.

Teorema 1.20. *Siano X uno spazio topologico, e $B, C \subset X$ insiemi. Si ha*

(i) $x \in \bar{B}$ se e solo se esiste un net $(x_\alpha) \subset B$ tale che $x_\alpha \to x$;

(ii) C è chiuso se e solo se per ogni net $(x_\alpha) \subset C$ che sia convergente ad un $x \in X$, si ha $x \in C$.

Dimostrazione. (i) Sia $x \in \bar{B}$. Per la proposizione 1.11, per ogni $U \in \mathscr{I}_x$ esisterà $x_U \in U \cap B$. Ricordando allora l'esempio 1.17(b), si vede che $(x_U)_{U\in\mathscr{I}_x}$ è un net, e per esso si ha $x_U \to x$: se $V \geq U$ vale $x_V \in V \subset U$. Viceversa se $(x_\alpha) \subset B$ converge a x, dato U intorno di x si ha $x_\alpha \in U \cap B$ per $\alpha \geq \alpha_U$, e dunque $x \in \bar{B}$.

(ii) Segue da (i) come nel caso degli spazi metrici, teorema 1.14. □

Dunque per definire una topologia su uno spazio X è sufficiente, invece che dare la classe degli insiemi aperti (o chiusi), dare la classe dei net convergenti.

Passiamo ora a considerare il caso generale di limiti di funzioni.

Definizione 1.21. Siano X, Y spazi topologici, $D \subset X$ un sottoinsieme, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per D, e $f : D \to Y$ una funzione. Si dice che il punto $\ell \in Y$ è un limite di f in x_0, e si scrive

$$\ell \in \lim_{x\to x_0} f(x),$$

se per ogni intorno U di ℓ in Y esiste un intorno V di x_0 in X tale che $f\big((D \setminus \{x_0\}) \cap V\big) \subset U$.

Usando la nozione di net data sopra, si può formulare un'analogo, per il concetto di limite appena definito, del "teorema ponte" noto dai corsi di base di Calcolo.

Proposizione 1.22. *Siano X, Y, D, x_0 e f come nella definizione di sopra. Si ha $\ell \in \lim_{x\to x_0} f(x)$ se e solo se per ogni net $(x_\alpha) \subset D \setminus \{x_0\}$ tale che $x_\alpha \to x_0$, si ha $f(x_\alpha) \to \ell$.*

Dimostrazione. Sia $\ell \in \lim_{x\to x_0} f(x)$, e siano U, V intorni di ℓ, x_0 rispettivamente come nella definizione 1.21. Se allora $(x_\alpha) \subset D \setminus \{x_0\}$ è un net tale che $x_\alpha \to x_0$, esisterà α_V tale che $x_\alpha \in V \cap (D \setminus \{x_0\})$ per ogni $\alpha \geq \alpha_V$, e dunque $f(x_\alpha) \in U$, da cui $f(x_\alpha) \to \ell$.

Viceversa se, per assurdo, $\ell \notin \lim_{x\to x_0} f(x)$, negando la definizione si vede che deve esistere un intorno U di ℓ in Y tale che per ogni intorno V di x_0 in X esista un $x_V \in (D \setminus \{x_0\}) \cap V$ per il quale $f(x_V) \notin U$. Ma allora, analogamente alla dimostrazione del teorema 1.20, $(x_V)_{V\in\mathscr{I}_{x_0}}$ è un net tale che $x_V \to x_0$, ma chiaramente $f(x_V) \not\to \ell$ (poiché non entra mai nell'intorno U), contro l'ipotesi. □

Da questo risultato e dalla proposizione 1.19 si ha il corollario seguente.

Corollario 1.23. *Il limite di una funzione a valori in uno spazio di Hausdorff, se esiste, è unico.*

Nel caso particolare in cui f è una funzione tra spazi metrici, la nozione di limite assume una forma più familiare dai corsi di Calcolo, in termini di "epsilon e delta".

Proposizione 1.24. *Siano (X, d), (Y, ρ) spazi metrici, $D \subset X$ con $x_0 \in X$ come punto di accumulazione, $f : D \to Y$. Si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $x \in D$ e $0 < d(x, x_0) < \delta_\varepsilon$, allora $\rho(f(x), \ell) < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. Data allora una palla $B_\varepsilon(\ell) \subset Y$, che è un intorno di ℓ, esisterà un intorno V di x_0 tale che $f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$ per ogni $x \in (D \setminus \{x_0\}) \cap V$, ma poiché le palle formano un base di intorni in uno spazio metrico, esisterà $B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \subset V$, e pertanto se $x \in D$ e $0 < d(x, x_0) < \delta_\varepsilon$, allora $x \in (D \setminus \{x_0\}) \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \subset (D \setminus \{x_0\}) \cap V$, e dunque $\rho(f(x), \ell) < \varepsilon$.

Viceversa dato un intorno U di ℓ in Y, esisterà una palla $B_\varepsilon(\ell) \subset U$. Preso allora $\delta_\varepsilon > 0$ come nell'enunciato e posto $V = B_{\delta_\varepsilon}(x_0)$, è chiaro che se $x \in (D \setminus \{x_0\}) \cap V$ allora $f(x) \in B_\varepsilon(\ell) \subset U$. □

In base a quanto visto sopra circa il ruolo delle successioni nel definire la topologia degli spazi metrici, non è sorprendente che nella situazione della proposizione appena dimostrata (f funzione tra spazi metrici), il "teorema ponte" 1.22 si può formulare usando successioni invece che net arbitrari (esercizio 1.11).

Data la nozione di limite per una funzione tra spazi topologici, la nozione di continuità si definisce in modo del tutto ovvio.

Definizione 1.25. Siano X, Y spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ si dirà *continua in* $x_0 \in X$ se $f(x_0) \in \lim_{x\to x_0} f(x)$ (in particolare $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$ se Y è di Hausdorff). f si dirà continua in X se è continua in ogni $x_0 \in X$.

Si vede facilmente, con dimostrazione analoga a quella per funzioni su $\mathbb{R}$, che composizioni di funzioni continue sono continue (esercizio 1.12). Da questo ad esempio segue subito che le usuali operazioni algebriche con funzioni continue da uno spazio topologico a $\mathbb{R}$ producono funzioni continue: somme e prodotti di funzioni continue sono continue, l'inversa di una funzione continua è continua dove non si annulla ecc.

Il prossimo teorema fornisce un'importante e utile caratterizzazione delle funzioni continue.

Teorema 1.26. *Siano X, Y spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ è continua, se e solo se per ogni aperto $A \subset Y$ la sua controimmagine*

$$f^{-1}(A) := \{x \in X \,:\, f(x) \in A\}$$

è un aperto di X.

Dimostrazione. Sia $f : X \to Y$ continua, e sia $A \subset Y$ un aperto. Per dimostrare che $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto basta dimostrare che è intorno di ogni suo punto. Sia allora $x \in f^{-1}(A)$. Essendo $f(x) \in A$ e A aperto, A sarà intorno di $f(x)$ e quindi, per la continuità di f, esisterà un intorno $V \subset X$ di x tale che $f(V) \subset A$, o, equivalentemente, $x \in V \subset f^{-1}(A)$, e dunque $f^{-1}(A)$ è intorno di x.

Viceversa supponiamo che la controimmagine tramite f di ogni aperto di Y sia un aperto di X. Bisogna mostrare che dato un $x \in X$, f è continua in x. Se U è un intorno di $f(x)$, per definizione esiste un $A \subset U$ aperto che contiene $f(x)$. Ma allora $V := f^{-1}(A) \subset X$ è un aperto che contiene x, ed è dunque un suo intorno, e inoltre è tale che $f(V) \subset A \subset U$, da cui la continuità di f in x. □

Nell'esercizio 1.13 è data l'ovvia formulazione "duale" di questo risultato, con i chiusi al posto degli aperti.

1.3 Operatori limitati e norme equivalenti

Come visto, gli spazi topologici più "semplici" sono gli spazi normati. Tra tutte le funzioni tra due spazi normati (complessi) X e Y, una classe particolarmente naturale, individuata dal fatto che i suoi elementi rispettano la struttura vettoriale, è quella delle funzioni lineari, dette anche *operatori lineari*, cioè delle applicazioni $T : X \to Y$ tali che $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$ per ogni $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, già considerate nel corso di Geometria. Tali operatori per noi saranno molto importanti, se non altro per il ruolo fondamentale che svolgono in Meccanica Quantistica. Per essi, la continuità si esprime in modo particolarmente semplice.

Definizione 1.27. Siano X, Y spazi normati. Un operatore lineare $T : X \to Y$ è detto *limitato*, se

$$\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < +\infty.$$

Teorema 1.28. *Siano X, Y spazi normati e $T : X \to Y$ lineare. Sono equivalenti:*

(i) T è limitato;

(ii) T *è continuo nel vettore* $0 \in X$*;*

(iii) T *è continuo su* X*.*

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii). Dato $x \in X \setminus \{0\}$, si ha

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \|x\| \leq \|T\|\|x\|,$$

avendo usato la linearità di T e l'omoegenità della norma nel primo passaggio, e il fatto che $x/\|x\|$ ha norma 1 nel secondo. Dato allora $\varepsilon > 0$ e posto $\delta_\varepsilon := \varepsilon/\|T\|$, se $\|x - 0\| = \|x\| < \delta_\varepsilon$ si ha $\|Tx - T0\| = \|Tx\| \leq \|T\|\|x\| < \varepsilon$, da cui, ricordando la proposizione 1.24, la continuità di T in 0.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Per la continuità di T in 0, dato $\varepsilon > 0$, esisterà $\delta > 0$ tale che se $\|x\| < \delta$, allora $\|Tx\| < \varepsilon$. Allora qualunque sia $x \in X$ tale che $\|x\| \leq 1$, si avrà

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\frac{x\delta}{2\|x\|}\right)\right\| \frac{2\|x\|}{\delta} < \varepsilon\frac{2\|x\|}{\delta} \leq \frac{2\varepsilon}{\delta},$$

dove nel secondo passaggio si è usato il fatto che $\|\frac{x\delta}{2\|x\|}\| = \delta/2 < \delta$. Ne segue $\|T\| < 2\varepsilon/\delta$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Siano ε e δ come sopra. Dato un qualunque $x_0 \in X$, se $\|x - x_0\| < \delta$ si avrà $\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| < \varepsilon$ per la linearità di T, e dunque T è continuo in x_0.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Ovvio. □

Conformandoci, in questo come in altri casi, all'uso della letteratura anglosassone, indicheremo con $B(X, Y)$ l'insieme di tutti gli operatori lineari limitati da X a Y (*bounded* è la parola inglese per "limitato"), e, per semplicità, porremo $B(X) := B(X, X)$ (operatori limitati di uno spazio normato X in se stesso).

Proposizione 1.29. *Siano* X, Y, Z *spazi normati. Allora*

(i) $B(X, Y)$ *è uno spazio vettoriale con le operazioni definite puntualmente:*

$$(T + S)x := Tx + Sx, \quad (\alpha T)x := \alpha Tx, \qquad T, S \in B(X, Y),\ x \in X,\ \alpha \in \mathbb{C},$$

e $T \in B(X, Y) \mapsto \|T\|$ *è una norma su di esso, detta* norma operatoriale*;*

(ii) definita, per ogni $T \in B(X, Y)$*,* $S \in B(Y, Z)$*, la composizione* $S \circ T : X \to Z$ *tramite* $(S \circ T)x := S(Tx)$*,* $x \in X$*, si ha* $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$ *.*

Dimostrazione. (i) È chiaro che $T + S$ e αT definiti nell'enunciato sono ancora operatori lineari da X a Y. Per dimostrare che $B(X, Y)$ è uno spazio vettoriale bisogna quindi dimostrare che sono limitati. Nel fare questo dimostreremo anche che $\|\cdot\|$ è una norma. Per ogni $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, si ha, per la disuguaglianza triangolare della norma su Y e per la definizione di $\|T\|$,

$$\|(T + S)x\| = \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq \|T\| + \|S\|,$$

e dunque $\|T+S\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(T+S)x\| \leq \|T\| + \|S\| < +\infty$ e $T+S \in B(X,Y)$. Analogamente, sempre con $x \in X$, $\|x\| \leq 1$,

$$\|(\alpha T)x\| = \|\alpha Tx\| = |\alpha|\|Tx\|,$$

da cui, prendendo l'estremo superiore su tutti i vettori $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$, $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\| < +\infty$ e $\alpha T \in B(X,Y)$. Infine se $\|T\| = 0$, dalla diseguaglianza $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$, $x \in X$, mostrata sopra, segue subito che $T = 0$.

(ii) Analogamente a sopra, la tesi segue subito dalla diseguaglianza

$$\|(S \circ T)x\| = \|S(Tx)\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|,$$

valida per $x \in X$, $\|x\| \leq 1$. □

Nel contesto del punto (ii), la composizione di S e T si indicherà anche semplicemente con ST. In particolare, si ottiene dalla proposizione precedente che $B(X)$ è un'*algebra normata*, cioè uno spazio normato in cui sia definito anche un prodotto bilineare $(S,T) \in B(X) \times B(X) \mapsto ST \in B(X)$ che, rispetto alla norma, soddisfi la proprietà (ii) dell'enunciato (cf. definizione **??**).

Esempio 1.30. Siano $X = C([a,b])$, $Y = \mathbb{C}$ (un operatore lineare a valori complessi è anche detto un *funzionale* lineare). Dato $c \in [a,b]$, consideriamo il funzionale $\delta_c : X \to Y$ definito da $\delta_c f := f(c)$, detto *delta di Dirac* (centrata in c). Usando su X la norma $\|\cdot\|_\infty$ (esempio 1.2(d)), si ha $\delta_c \in B(X,Y)$. Infatti,

$$|\delta_c f| = |f(c)| \leq \|f\|_\infty, \qquad f \in X,$$

da cui, prendendo $\|f\|_\infty \leq 1$, $\|\delta_c\| \leq 1$. Anzi si ha proprio $\|\delta_c\| = 1$, come si vede osservando che chiaramente esiste una $f \in X$ tale che $\|f\|_\infty \leq 1$ e $f(c) = \delta_c f = 1$. Il funzionale δ_c non è invece limitato se su X si considera la norma $\|\cdot\|_1$ (esempio 1.2(e)). Se infatti si considerano le funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ il cui grafico è il triangolo isoscele di base $[c-1/n, c+1/n]$ e altezza n, si avrà chiaramente $\|f_n\|_1 = \int_a^b |f_n(t)|\,dt = 1$ e $\delta_c f = f(c) = n$, da cui $\|\delta_c\| = \sup_{\|f\|_1 \leq 1} |\delta_c f| = +\infty$ (in sostanza, si possono avere funzioni continue i cui integrali sono limitati ma che in un dato punto possono essere arbitrariamente grandi).

Dunque uno stesso operatore può essere limitato o meno a seconda di quali norme si considerano sugli spazi dominio o codominio. Un altro esempio a proposito è fornito dall'esercizio 1.15.

È chiaro dalla definizione che, grosso modo, la norma $\|T\|$ misura il massimo degli allungamenti dei vettori di X sotto l'azione dell'operatore T. Non è allora sorprendente che, nel caso di operatori $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (o, equivalentemente, da uno spazio finito-dimensionale in se stesso), la norma si può calcolare in termini degli autovalori di T (quindi in particolare un tale T è automaticamente continuo, esercizio 1.16). Vedremo nel capitolo **??** che questo risultato si generalizza a operatori tra spazi infinito-dimensionali, e oltre (teorema **??** del raggio spettrale), a patto di dare la giusta definizione di spettro per tali operatori (che non coinciderà con l'insieme degli autovalori).

Nelle applicazioni può accadere che ciò che interessa veramente è non tanto la norma, ma la topologia che essa definisce, e anzi è possibile che norme diverse inducano su uno spazio la stessa topologia. In tal caso esse si dicono *topologicamente equivalenti* (o semplicemente equivalenti). Il risultato seguente fornisce un criterio utile allo scopo di verificare tale proprietà.

Proposizione 1.31. *Sia X uno spazio vettoriale. Due norme $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$ su X sono topologicamente equivalenti se e solo se esistono constanti $c, C > 0$ tali che*

$$c\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq C\|x\|_\alpha, \qquad \forall\, x \in X. \tag{1.3}$$

Dimostrazione. La disuguaglianza di destra della (1.3) è equivalente al fatto che l'applicazione identica $\mathbb{1} : X \to X$, definita da $\mathbb{1}(x) := x$, $x \in X$, è limitata (con norma $\leq C$), se pensata come applicazione da $(X, \|\cdot\|_\alpha)$ a $(X, \|\cdot\|_\beta)$. Questo a sua volta è equivalente, per il teorema 1.28, al fatto che tale applicazione è continua, e dunque, per il teorema 1.26, al fatto che per ogni $A \subset X$ che sia aperto rispetto alla topologia τ_β definita da $\|\cdot\|_\beta$, si abbia che $A = \mathbb{1}^{-1}(A)$ è aperto nella topologia τ_α definita da $\|\cdot\|_\alpha$, cioè al fatto che $\tau_\beta \subset \tau_\alpha$. Analogamente si vede che la prima disuguaglianza della (1.3) è equivalente a $\tau_\alpha \subset \tau_\beta$. Quindi la (1.3) è equivalente a $\tau_\alpha = \tau_\beta$, cioè la tesi. □

Utilizzeremo la notazione abbreviata $\|\cdot\|_\beta \lesssim \|\cdot\|_\alpha$ per indicare che vale la disuguaglianza a destra della (1.3), e la notazione $\|\cdot\|_\beta \lnsim \|\cdot\|_\alpha$ per indicare che vale la disuguaglianza a destra della (1.3) ma non quella a sinistra (e quindi che le due norme non sono equivalenti). In tal caso si dice anche che la norma $\|\cdot\|_\alpha$ è *(strettamente) più forte* della $\|\cdot\|_\beta$.

Esempio 1.32. Sullo spazio $X = C([a, b])$ abbiamo definito le norme $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, negli esempi 1.2(d), (e), (f) rispettivamente. Mostriamo ora che si ha

$$\|\cdot\|_1 \lnsim \|\cdot\|_2 \lnsim \|\cdot\|_\infty.$$

Si hanno le disuguaglianze ovvie

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt \leq \|f\|_\infty (b-a),$$
$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \leq \|f\|_\infty (b-a)^{1/2},$$

e, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, teorema 3.2,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \cdot 1\, dt \leq \|f\|_2 \|1\|_2 = \|f\|_2 (b-a)^{1/2},$$

e dunque

$$\|f\|_1 \leq (b-a)^{1/2} \|f\|_2 \leq (b-a)\|f\|_\infty, \qquad \forall f \in X,$$

da cui $\|\cdot\|_1 \lesssim \|\cdot\|_2 \lesssim \|\cdot\|_\infty$. Mostriamo poi che $\|\cdot\|_\infty \not\lesssim \|\cdot\|_2$. A tale scopo assumiamo, per semplicità, che $[a,b]=[0,1]$, e consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(t) := \begin{cases} 0 & t \in [1/n, 1] \\ 1-nt & t \in [0, 1/n] \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Si ha allora

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{1/n} (1-nt)^2\, dt = \frac{1}{3n} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty,$$

mentre $\|f_n\|_\infty = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per cui non può esistere $C > 0$ tale che $\|f_n\|_\infty \leq C\|f_n\|_2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (o, equivalentemente, $\mathbb{1} : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_\infty)$ non può essere continua). Infine, allo scopo di mostrare che $\|\cdot\|_2 \not\lesssim \|\cdot\|_1$, consideriamo la successione di funzioni

$$g_n(t) := \begin{cases} n & t \in [0, 1/n^2] \\ \frac{1}{\sqrt{t}} & t \in [1/n^2, 1] \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

ottenuta troncando all'altezza n la funzione $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ che è integrabile in $[0,1]$, ma il cui quadrato non è integrabile. Infatti si ha, per $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \|g_n\|_2^2 &= \int_0^{1/n^2} n^2\, dt + \int_{1/n^2}^1 \frac{dt}{t} = 1 + \int_{1/n^2}^1 \frac{dt}{t} \to +\infty, \\ \|g_n\|_1 &= \int_0^{1/n^2} n\, dt + \int_{1/n^2}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{n} + \int_{1/n^2}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \to \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} < +\infty, \end{aligned}$$

e dunque anche in questo caso non può esistere $C > 0$ tale che $\|g_n\|_2 \leq C\|g_n\|_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Un altro esempio di norme non equivalenti è fornito dall'esercizio 1.17. Il teorema seguente mostra che l'esistenza di norme non equivalenti distingue drasticamente gli spazi infinito-dimensionali da quelli finito-dimensionali.

Teorema 1.33. *Sia X uno spazio vettoriale finito-dimensionale. Tutte le norme su X sono equivalenti.*

Dimostrazione. Sia $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ una base di X. Allora ogni $x \in X$ si scrive in modo unico come $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$, ed è chiaro che

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |\xi_i|$$

è una norma su X. Basta allora dimostrare che se $\|\cdot\|$ è una norma su X, essa è equivalente a $\|\cdot\|_1$. Si ha

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \Big\| \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i| \|e_i\| \leq \Big(\max_{i=1,\dots,n} \|e_i\| \Big) \|x\|_1, \qquad \forall\, x \in X,$$

e dunque $\|\cdot\| \lesssim \|\cdot\|_1$ (prendendo $C := \max_{i=1,\dots,n} \|e_i\|$). Per concludere bisogna allora dimostrare che esiste $c > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq c\|x\|$ per ogni $x \in X$, cioè, supponendo $x \neq 0$ (se $x = 0$ la disuguaglianza è ovvia) e dividendo per $\|x\|_1$,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \geq \frac{1}{c} > 0 \qquad \forall x \in X,\, x \neq 0,$$

o, equivalentemente,

$$\inf_{\|x\|_1=1} \|x\| = \inf_{\substack{\xi\in\mathbb{C}^n \\ \|\xi\|_1=1}} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right\| > 0.$$

Ma l'insieme $S := \{\xi \in \mathbb{C}^n : \|\xi\|_1 = 1\}$ è chiuso e limitato, e l'applicazione $\xi \mapsto \| \sum_{i=1}^n \xi_i e_i\|$ è continua su $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$ poiché

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \right\| \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i) e_i \right\| \leq C\|\xi - \eta\|_1,$$

avendo usato nella prima disuguaglianza l'esercizio 1.18 e nella seconda il fatto che $\|\cdot\| \lesssim \|\cdot\|_1$ visto sopra. Dunque per il teorema di Weierstrass

$$\inf_{\substack{\xi\in\mathbb{C}^n \\ \|\xi\|_1=1}} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right\| = \min_{\xi\in S} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right\| > 0$$

e si conclude. □

Dunque in particolare le norme $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su $\mathbb{C}^n$ sono equivalenti. Per esse, è anche facile calcolare le costanti che intervengono nella (1.3) (esercizio 1.19). Un altro esempio di norme equivalenti, questo su spazi anche infinito-dimensionali, è dato nell'esercizio 1.20, in cui viene anche introdotta l'importante nozione di *somma diretta* di due spazi normati.

Un'altra conseguenza interessante del teorema, e dell'esercizio 1.16, è che un operatore lineare con dominio finito-dimensionale è automaticamente limitato (esercizio 1.21).

1.4 Completezza

Come noto dai corsi di Calcolo, una proprietà essenziale dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, che lo distingue nettamente da quello dei razionali, è la completezza, cioè il fatto che ogni successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ è convergente. Grazie a essa, ad esempio, è possibile definire la radice quadrata di un numero reale non negativo. Essendo la nozione di convergenza di una successione in uno spazio metrico una diretta generalizzazione di quella di successioni reali, non è sorprendente che la nozione di completezza giochi un ruolo fondamentale anche nella teoria generale degli spazi metrici.

Definizione 1.34. Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ è detta una *successione di Cauchy*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che se $n, m \geq n_\varepsilon$ allora $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Si vede facilmente, come per le successioni reali, che ogni successione convergente in uno spazio metrico è di Cauchy (esercizio 1.22). Come per $\mathbb{R}$, la completezza di uno spazio metrico è il fatto che valga anche il viceversa.

Definizione 1.35. Uno spazio metrico (X, d) si dice *completo* se ogni sua successione di Cauchy è convergente. Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ si dice uno *spazio di Banach* se è completo nella metrica indotta dalla norma.

È noto, sempre dai corsi di Calcolo, che $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidea è uno spazio di Banach. Da questo, e dal teorema 1.33 segue che ogni spazio normato finito-dimensionale è di Banach (esercizio 1.23). Un semplice esempio di spazio metrico non completo è fornito nell'esercizio 1.24. Di seguito vediamo alcuni esempi più interessanti.

Esempi 1.36. (a) Lo spazio $(\ell^\infty(T), \|\cdot\|_\infty)$, definito nell'esempio 1.2(c), è uno spazio di Banach. Sia infatti $(f_n) \subset \ell^\infty(T)$ una successione di Cauchy. Poiché allora

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \qquad \forall\, t \in T,$$

la successione $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ è di Cauchy in $\mathbb{C}$ per ogni $t \in T$, ed essendo $\mathbb{C}$ completo esisterà

$$f(t) := \lim_{n\to+\infty} f(t) \qquad \forall\, t \in T.$$

Si ottiene in tal modo una funzione $f : T \to \mathbb{C}$. Per concludere bisogna allora dimostrare che $f \in \ell^\infty(T)$ e che $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. A tale scopo, fissato $\varepsilon > 0$ sia $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ come nella definizione di successione di Cauchy. Allora in base a quanto appena visto si ha, per ogni $n > n_\varepsilon$,

$$|f_n(t) - f(t)| = \lim_{m\to+\infty} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \limsup_{m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon \qquad \forall\, t \in T,$$

poichè definitivamente $m > n_\varepsilon$ per $m \to +\infty$. Da questo segue $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ per $n \to +\infty$, e inoltre, fissato $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(t)| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t)| \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty < +\infty \qquad \forall t \in T,$$

e quindi f è limitata, cioè $f \in \ell^\infty(T)$.

(b) Dall'esempio precedente segue subito che anche $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach. Basta infatti osservare che $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ equivale a dire che la successione di funzioni (f_n) converge uniformemente in $[a, b]$ alla funzione f. Se allora $f \in \ell^\infty([a, b])$ è il limite della successione di Cauchy $(f_n) \subset C([a, b]) \subset \ell^\infty([a, b])$ costruito sopra, dai teoremi sulla convergenza uniforme visti nei corsi di Calcolo è noto che $f \in C([a, b])$.

(c) Sia I un insieme arbitrario, e si indichi con $\mathscr{P}_0(I)$ l'insieme dei suoi sottoinsiemi finiti (o parti finite). Su $\mathscr{P}_0(I)$ si può definire un ordinamento parziale diretto dichiarando che $F \leq G$ se e solo se $F \subset G$. Dato allora uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ e una famiglia $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ di vettori di X (che, malgrado la notazione, *non è* un net poiché non stiamo assumendo che I sia diretto), si può definire la sua somma $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ come il limite, se esiste, delle somme finite $\sum_{\alpha\in F} x_\alpha$, $F \in \mathscr{P}_0(I)$, pensate come un net in X su $\mathscr{P}_0(I)$ (con l'ordinamento parziale appena definito):

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha := \lim_{F\in\mathscr{P}_0(I)} \sum_{\alpha\in F} x_\alpha.$$

Ciò posto, consideriamo gli insiemi

$$\ell^1(I) := \Big\{x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \subset \mathbb{C} \,:\, \|x\|_1 := \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha| < +\infty\Big\},$$
$$\ell^2(I) := \Big\{x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \subset \mathbb{C} \,:\, \|x\|_2 := \Big(\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|^2\Big)^{1/2} < +\infty\Big\}.$$

Si verifica facilmente (esercizio 1.25) che $(\ell^1(I), \|\cdot\|_1)$, $(\ell^2(I), \|\cdot\|_2)$ sono spazi normati, naturali generalizzazioni infinito-dimensionali di $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$. Mostriamo che sono di Banach. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^p(I)$, $p = 1, 2$, una successione di Cauchy. Osserviamo esplicitamente, per evitare confusione, che ogni elemento x_n di una tale successione è a sua volta una famiglia, a priori infinita, di numeri complessi $x_n = (x_{n\alpha})_{\alpha\in I} \in \ell^p(I)$. Per dimostrare che esiste $x \in \ell^p(I)$ limite della successione (x_n) seguiamo la falsariga dell'esempio (a) di sopra. Grazie all'esercizio 1.26, si ha

$$|x_{n\alpha} - x_{m\alpha}| \le \|x_n - x_m\|_p \qquad \forall\, \alpha \in I,$$

e dunque, per la completezza di $\mathbb{C}$, esisterà $x_\alpha := \lim_{n\to+\infty} x_{n\alpha} \in \mathbb{C}$ per ogni $\alpha \in I$. Posto allora $x := (x_\alpha)_{\alpha\in I}$, e scelti $\varepsilon > 0$ e $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ come nella definizione di successione di Cauchy, si avrà, per ogni $n > n_\varepsilon$ e per ogni $F \in \mathscr{P}_0(I)$,

$$\sum_{\alpha\in F} |x_{n\alpha} - x_\alpha|^p = \lim_{m\to+\infty} \sum_{\alpha\in F} |x_{n\alpha} - x_{m\alpha}|^p \le \limsup_{m\to+\infty} \|x_n - x_m\|_p^p \le \varepsilon^p,$$

da cui segue

$$\|x_n - x\|_p^p = \lim_F \sum_{\alpha\in F} |x_{n\alpha} - x_\alpha|^p \le \varepsilon^p,$$

e cioè $\|x_n - x\|_p \to 0$. Inoltre osservando che, per ogni $F \in \mathscr{P}_0(I)$, $(x_\alpha)_{\alpha\in F} \mapsto (\sum_{\alpha\in F} |x_\alpha|^p)^{1/p}$ è la norma $\|\cdot\|_p$ su $\mathbb{C}^{\sharp F}$, si ha

$$\Big(\sum_{\alpha\in F} |x_\alpha|^p\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{\alpha\in F} |x_\alpha - x_{n\alpha}|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{\alpha\in F} |x_{n\alpha}|^p\Big)^{1/p} \le \|x - x_n\|_p + \|x_n\|_p,$$

da cui $\|x\|_p \le \|x - x_n\|_p + \|x_n\|_p < +\infty$ e quindi $x \in \ell^p(I)$.

(d) Mostriamo che gli spazi $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$, $(C([0,1]), \|\cdot\|_2)$ non sono di Banach. A tale scopo consideriamo la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1])$ definita da

$$f_n(t) := \begin{cases} n & t \in [0, e^{-n}] \\ -\log t & t \in [e^{-n}, 1] \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

cioè il troncamento ad altezza n della funzione $t \mapsto -\log t$, che è integrabile (in senso improprio) e a quadrato integrabile in $[0,1]$, ma ovviamente non sta in $C([0,1])$.

Mostriamo che tale successione è di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$, e quindi anche rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ grazie a quanto visto nell'esempio 1.32 (cioè al fatto che $\|\cdot\|_1 \lesssim \|\cdot\|_2$). Per ogni $n, p \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned}
\|f_{n+p} - f_n\|_2^2 &= \int_0^1 |f_{n+p} - f_n| && (f_{n+p}(t) = f_n(t) = -\log t \text{ per } t \in [e^{-n}, 1]\,) \\
&= \int_0^{e^{-n}} |f_{n+p} - f_n|^2 \\
&\le \int_0^{e^{-n}} (|f_{n+p}| + |f_n|)^2 && (|f_{n+p}(t)| + |f_n(t)| \le -2\log t\,) \\
&\le 4\int_0^{e^{-n}} \log^2 t\, dt && (\text{per parti due volte}) \\
&= \big[t(\log^2 t - 2\log t + 2)\big]_0^{e^{-n}} \\
&= e^{-n}(n^2 + 2n + 2) \to 0 && \text{per } n \to +\infty,
\end{aligned}$$

e dunque $\|f_{n+p} - f_n\|_2$ può essere resa arbitrariamente piccola prendendo n sufficientemente grande. Basta allora dimostrare che la successione (f_n) non converge rispetto a $\|\cdot\|_1$, poiché in tal caso non converge nemmeno rispetto a $\|\cdot\|_2$, sempre per quanto visto nell'esempio 1.32. Sia allora $f \in C([0,1])$, e mostriamo che $\|f_n - f\|_1 \not\to 0$. A tale scopo fissiamo $\bar{n} > \|f\|_\infty$. Allora per ogni $n > \bar{n}$ si ha

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_1 &= \int_0^1 |f_n - f| \ge \int_0^{e^{-\bar{n}}} |f_n - f| \ge \int_0^{e^{-\bar{n}}} (|f_n| - |f|) \\
&\ge \int_0^{e^{-\bar{n}}} (f_n(t) - \|f\|_\infty)\, dt \\
&= \int_0^{e^{-n}} n\, dt - \int_{e^{-n}}^{e^{-\bar{n}}} \log t\, dt - \|f\|_\infty e^{-\bar{n}} \\
&= ne^{-n} - \big[t\log t - t\big]_{e^{-n}}^{e^{-\bar{n}}} - \|f\|_\infty e^{-\bar{n}} \\
&= e^{-\bar{n}}(\bar{n} + 1 - \|f\|_\infty) - e^{-n},
\end{aligned}$$

e l'ultimo membro converge, per $n \to +\infty$, a $e^{-\bar{n}}(\bar{n} + 1 - \|f\|_\infty) > 0$ (per la scelta di $\bar{n}$). Si potrebbe pensare che, per ottenere spazi completi, basti aggiungere a $C([0,1])$ le funzioni impropriamente integrabili o a quadrato integrabile. Si può in realtà dimostrare che nemmeno questo è sufficiente, mentre vedremo che spazi completi di funzioni integrabili si costruiscono con relativa facilità ricorrerendo alla teoria dell'integrazione alla Lebesgue (teorema 2.28). E anzi questa è una delle motivazioni più forti per andare oltre la teoria dell'integrazione di Riemann e considerare quella di Lebesgue.

Altri esempi sono forniti nell'esercizio 1.27. Un'ulteriore importante classe di spazi di Banach si ottiene considerando operatori limitati a valori in uno spazio di Banach.

Proposizione 1.37. *Siano X uno spazio normato e Y uno spazio di Banach. Allora $B(X,Y)$ è uno spazio di Banach (con la norma operatoriale).*

Dimostrazione. La dimostrazione è basata ancora sulla stessa idea degli esempi 1.36(a) e (c). Sia dunque $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X,Y)$ una successione di Cauchy. Poiché $\|T_n x - T_m x\| \le \|T_n - T_m\|\|x\|$ per ogni $x \in X$, $n, m \in \mathbb{N}$, e poiché per ipotesi Y è di Banach, esiste in Y il limite

$$Tx := \lim_{n\to+\infty} T_n x \qquad \forall\, x \in X.$$

Si verifica facilmente che l'applicazione $x \in X \mapsto Tx \in Y$ così definita è lineare:

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= \lim_{n\to+\infty} T_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \alpha_1 T_n x_1 + \alpha_2 T_n x_2 = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2. \end{aligned}$$

Inoltre dato $\varepsilon > 0$ si avrà, per n sufficientemente grande,

$$\|T_n x - Tx\| = \lim_{m\to+\infty} \|T_n x - T_m x\| \le \limsup_{m\to+\infty} \|T_n - T_m\|\|x\| \le \varepsilon\|x\| \qquad \forall\, x \in X,$$

da cui $\|T_n - T\| \to 0$. Infine, fissato $n \in \mathbb{N}$,

$$\|Tx\| \le \|Tx - T_n x\| + \|T_n x\| \le (\|T - T_n\| + \|T_n\|)\|x\| \qquad \forall\, x \in X,$$

e quindii $T \in B(X,Y)$. □

In particolare, se X è uno spazio di Bananch, $B(X)$ è un'*algebra di Banach*, cioè un'algebra normata completa rispetto alla metrica indotta dalla norma.

Un sottoinsieme D di uno spazio topologico X si dice *denso* in X se $\bar{D} = X$. Capita assai spesso nelle applicazioni che sia necessario definire un operatore su uno spazio normato, ma che sia "facile" farlo soltanto su un suo opportuno sottospazio denso. Si pone dunque il problema di estendere tale operatore a tutto lo spazio. Il fondamentale teorema seguente garantisce che questo è possibile se si sa dimostrare che l'operatore in questione è limitato (sul sottospazio su cui è definito) e che prende valori in uno spazio di Banach.

Teorema 1.38. *Siano X uno spazio normato, e Y uno spazio di Banach. Dato un sottospazio vettoriale D denso in X e un operatore limitato $T \in B(D,X)$, esiste un unico operatore $\bar{T} \in B(X,Y)$ che estende T (cioè tale che $\bar{T}x = Tx$ per ogni $x \in D$). Inoltre si ha $\|\bar{T}\| = \|T\|$.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'esistenza di $\bar{T}$. Dato $x \in X = \bar{D}$, esisterà (per il teorema 1.14) una successione $(x_n) \subset D$ convergente a x, e quindi di Cauchy in X. Essendo $\|T\| < \infty$, dalla disuguaglianza

$$\|Tx_n - Tx_m\| \le \|T\|\|x_n - x_m\|, \qquad n, m \in \mathbb{N},$$

segue allora che $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in Y di Banach, e dunque che esiste

$$\bar{T}x := \lim_{n\to+\infty} Tx_n, \qquad x \in X.$$

Tale limite è inoltre indipendente dalla successione (x_n) scelta: se infatti $(\tilde{x}_n) \subset D$ è un'altra successione convergente a $x \in X$, si avrà $\|Tx_n - T\tilde{x}_n\| \le \|T\|\|x_n - \tilde{x}_n\| \to 0$.

Dunque il limite di sopra definisce effettivamente un'applicazione $\bar{T}: X \to Y$ che estende T, in quanto se $x \in D$ per calcolare $\bar{T}x$ si può chiaramente prendere la successione $x_n = x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi $\bar{T}x = Tx$. Inoltre $\bar{T}$ così definita è lineare: se $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, prese successioni $(x_n), (y_n) \subset D$ tali che $x_n \to x$, $y_n \to y$, si ha $\alpha x_n + \beta y_n \in D$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (D è un sottospazio) e $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$, e pertanto, per definizione di $\bar{T}$,

$$\bar{T}(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to +\infty} T(\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{n \to +\infty} \alpha \, T x_n + \beta \, T y_n = \alpha \, \bar{T} x + \beta \, \bar{T} y.$$

Infine si ha $\bar{T} \in B(X, Y)$: se $(x_n) \subset D$ converge a $x \in X$ si ha anche $\|x_n\| \to \|x\|$, $\|Tx_n\| \to \|\bar{T}x\|$ (esercizio 1.18), e quindi

$$\|\bar{T}x\| = \lim_{n \to +\infty} \|Tx_n\| \leq \lim_{n \to +\infty} \|T\| \|x_n\| = \|T\| \|x\|, \qquad x \in X,$$

da cui $\|\bar{T}\| \leq \|T\|$. Essendo poi $\|\bar{T}x\| = \|Tx\|$ per ogni $x \in D$ si ha anche $\|\bar{T}\| \geq \|T\|$, e quindi $\|\bar{T}\| = \|T\|$.

L'unicità di $\bar{T}$ è praticamente ovvia: se $\tilde{T} \in B(X, Y)$ è un'altra estensione di T, dato $x \in X$ e $(x_n) \subset D$ convergente a x sarà, per la continuità di $\tilde{T}$,

$$\tilde{T}x = \lim_{n \to +\infty} \tilde{T}x_n = (\tilde{T} \text{ estende } T) = \lim_{n \to +\infty} Tx = \bar{T}x,$$

cioè $\tilde{T} = \bar{T}$. □

In realtà, nel teorema precedente, l'ipotesi "Y spazio di Banach" non è veramente restrittiva, poiché ogni spazio normato si può pensare come un sottospazio denso di un opportuno spazio di Banach, e anzi, più in generale, un qualunque spazio metrico può essere immerso come un sottoinsieme denso in un opportuno spazio completo. Questo è precisato dall'importante teorema seguente, per formulare il quale introduciamo la nozione di *isometria* tra due spazi metrici (X, d) e (Y, ρ): è questa un'applicazione $\phi : X \to Y$ che rispetta le distanze, cioè tale che $\rho(\phi(x_1), \phi(x_2)) = d(x_1, x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in X$. È chiaro che un'isometria è iniettiva. Se è suriettiva (e quindi biunivoca) X e Y, come spazi metrici, si possono identificare.

Teorema 1.39 (Completamento di spazi metrici e normati)**.** *Dato uno spazio metrico (X, d), esistono uno spazio metrico completo $(\bar{X}, \bar{d})$, detto il* completamento di (X, d), *e un'isometria $j : X \to \bar{X}$, tali che $\overline{j(X)} = \bar{X}$ (cioè $j(X)$ è denso in $\bar{X}$). Inoltre il completamento di (X, d) è unico, nel senso che se $(\tilde{X}, \tilde{d})$ è un altro spazio completo e $k : X \to \tilde{X}$ è un'altra isometria tali che $\overline{k(X)} = \tilde{X}$, esiste un'isometria suriettiva $\phi : \bar{X} \to \tilde{X}$ tale che $\phi \circ j = k$.*

Infine, se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato, la metrica $\bar{d}$ del suo completamento (come spazio metrico con la metrica d indotta dalla norma) è indotta da una norma $\|\cdot\|^-$ e $j : X \to \bar{X}$ è lineare. Lo spazio di Banach $(\bar{X}, \|\cdot\|^-)$ è detto allora il completamento dello spazio normato $(X, \|\cdot\|)$.

Dimostrazione. Esistenza. Definiremo $\bar{X}$ come un opportuno sottoinsieme chiuso dello spazio di Banach $\ell^\infty(X)$ delle funzioni limitate da X a $\mathbb{C}$, dotato della metrica $\bar{d}$

indotta dalla norma $\|\cdot\|_\infty$. A tale scopo fissiamo un $a \in X$ e consideriamo, per ogni $x \in X$, l'applicazione $\varphi_x : X \to \mathbb{C}$ definita da

$$\varphi_x(\xi) := d(\xi, x) - d(\xi, a), \qquad \xi \in X.$$

Si ha $\varphi_x \in \ell^\infty(X)$ per ogni $x \in X$: infatti dall'esercizio 1.28 (conseguenza della disuguaglianza triangolare) segue

$$|\varphi_x(\xi)| = |d(\xi, x) - d(\xi, a)| \leq d(x, a) \qquad \forall\, \xi \in X,$$

e quindi $\|\varphi_x\|_\infty \leq d(x, a)$. Si può allora definire un'applicazione $j : X \to \ell^\infty(X)$ ponendo $j(x) := \varphi_x$, $x \in X$. Tale applicazione è isometrica. Si ha infatti, per ogni $x, y \in X$,

$$\bar{d}(j(x), j(y)) = \|\varphi_x - \varphi_y\|_\infty = \sup_{\xi \in X} |\varphi_x(\xi) - \varphi_y(\xi)| = \sup_{\xi \in X} |d(x, \xi) - d(y, \xi)| \leq d(x, y),$$

avendo usato ancora l'esercizio 1.28 nell'ultimo passaggio, ed essendo poi

$$|\varphi_x(y) - \varphi_y(y)| = d(x, y)$$

si ha proprio $\bar{d}(j(x), j(y)) = \sup_{\xi \in X} |\varphi_x(\xi) - \varphi_y(\xi)| = d(x, y)$. Per concludere, basta allora porre $\bar{X} := \overline{j(X)}$ (chiusura in $\ell^\infty(X)$).

Unicità. Vedere il punto (e) dell'esercizio 1.30, che usa le idee della dimostrazione del teorema 1.38.

Infine, per il completamento di uno spazio normato, vedere il punto (f) dell'esercizio 1.30. □

I punti (a)-(d) dell'esercizio 1.30 forniscono una costruzione alternativa del completamento, basata sulla stessa procedura che si usa per definire i numeri reali a partire da successioni di Cauchy di numeri razionali. Ma, per l'unicità del completamento, le due costruzioni danno luogo a spazi isometrici.

1.5 Compattezza

Un'altra proprietà fondamentale di $\mathbb{R}^n$, anch'essa nota dai corsi di Calcolo, è il fatto che le successioni contenute in insiemi chiusi e limitati (detti anche compatti) hanno sempre sottosuccessioni convergenti (a un punto dell'insieme), il che si rivela di grande utilità per dimostrare l'esistenza di "soluzioni" di certe equazioni costruendo opportunamente successioni di soluzioni "approssimate". Tale proprietà in realtà caratterizza gli insiemi chiusi e limitati in $\mathbb{R}^n$ (teorema di Bolzano-Weierstrass). È quindi naturale il desiderio di identificare gli insiemi che ne godono anche in spazi più generali, e vedremo nel capitolo **??** che tali insiemi giocano un ruolo fondamentale nella teoria spettrale degli operatori su uno spazio di Hilbert. Purtroppo però una generalizzazione diretta fallisce drammaticamente in dimensione infinita, come mostra il seguente risultato.

Proposizione 1.40. *Sia X uno spazio normato infinito-dimensionale. La palla unitaria (chiusa) di X,*

$$B_X := \{x \in X \,:\, \|x\| \leq 1\},$$

contiene successioni che non ammettono sottosuccessioni convergenti.

Dimostrazione. Basta dimostrare che esiste una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ tale che $\|x_j\| = 1$ e $\|x_j - x_k\| \geq 1/2$ per ogni $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$. Infatti una tale successione non potrà ammettere sottosuccessioni di Cauchy, e quindi tantomeno sottosuccessioni convergenti. Supponiamo allora induttivamente di aver costruito i primi k elementi $x_1, \dots, x_k$ di tale successione, e poniamo $V_k := \langle x_1, \dots, x_k\rangle$, il sottospazio vettoriale di X generato da $x_1, \dots, x_k$ (cioè il sottospazio delle combinazioni lineari $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$). Poiché ovviamente V_k ha dimensione finita ($\leq k$), esisterà un $y \in X \setminus V_k$. Posto allora

$$\operatorname{dist}(y, V_k) := \inf_{x\in V_k} \|y - x\|,$$

si avrà $\operatorname{dist}(y, V_k) > 0$: in caso contrario, esisterebbe, per le proprietà dell'estremo inferiore, una successione $(\xi_n) \subset V_k$ convergente a y, ma essendo V_k chiuso (esercizio 1.31), questo implicherebbe $y \in V_k$, contro la scelta fatta di y. Dunque, ancora per le proprietà dell'estremo inferiore, si può scegliere $y_k \in V_k$ tale che $\|y - y_k\| < 2\operatorname{dist}(y, V_k)$. Posto allora

$$x_{k+1} := \frac{y - y_k}{\|y - y_k\|},$$

si ha chiaramente $\|x_{k+1}\| = 1$, e pertanto per concludere il passo induttivo, e quindi la dimostrazione, basta verificare che $\|x_{k+1} - x_j\| \geq 1/2$ per ogni $j = 1, \dots, k$. Si ha infatti

$$\|x_{k+1} - x_j\| = \frac{\|y - (y_k + \|y - y_k\| x_j)\|}{\|y - y_k\|} > \frac{\operatorname{dist}(y, V_k)}{2\operatorname{dist}(y, V_k)} = \frac{1}{2},$$

dove nel secondo passaggio si è usato il fatto che $y_k + \|y - y_k\| x_j \in V_k$. □

Esiste tuttavia un'altra caratterizzazione, puramente topologica, dei sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$, che fa intervenire la nozione di *ricoprimento aperto* di un insieme C, cioè di una famiglia di aperti $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$, I insieme arbitrario di indici, tale che $C \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$. Se per un sottoinsieme $J \subset I$ risulta ancora $C \subset \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$, la sottofamiglia $(U_\alpha)_{\alpha\in J}$ sarà detta un *sottoricoprimento* di $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$. Ovviamente tali nozioni hanno senso in uno spazio topologico arbitrario.

Teorema 1.41 (Heine-Borel)**.** *Un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso e limitato se e solo se da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito.*

Dimostrazione. Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, e per assurdo supponiamo che esista un suo ricoprimento aperto $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ che non ammette sottoricoprimenti finiti. Sia $Q \subset \mathbb{R}^n$ un cubo chiuso di lato l contenente C. Prendendo i punti medi dei lati di Q, lo si può suddividere in 2^n cubi chiusi di lato $l/2$, privi di punti interni in comune. Tra questi almeno uno, sia esso Q_1, sarà tale che l'insieme chiuso e limitato $C \cap Q_1$ non potrà essere ricoperto da un numero finito di aperti del ricoprimento $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ (e quindi in particolare $C \cap Q_1 \neq \emptyset$). Iterando questo ragionamento, si costruisce un successione

$$Q =: Q_0 \supset Q_1 \supset \cdots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \supset \ldots$$

di cubi di lato $l/2^k$ tali che $C \cap Q_k \neq \emptyset$ non possa essere ricoperto da un numero finito di aperti di $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Scelto allora $x_k \in C \cap Q_k$, $k \in \mathbb{N}$, per il teorema di Bolzano-Weierstrass la successione $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C$ avrà un punto limite $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} C \cap Q_k$. Ma poiché $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ è un ricoprimento di C, esisterà $\bar{\alpha} \in I$ tale che $x_0 \in U_{\bar{\alpha}}$, e allora $C \cap Q_k \subset U_{\bar{\alpha}}$ per k sufficientemente grande, il che è assurdo per la costruzione degli Q_k.

Viceversa sia $C \subset \mathbb{R}^n$ tale che da ogni suo ricoprimento aperto si possa estrarre un sottoricoprimento finito. Se per assurdo C non fosse chiuso esisterebbe $x_0 \in \bar{C} \setminus C$, e posto allora $U_k := \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_{1/k}(x_0)$ si avrebbe $\bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k = \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \supset C$, ma, per ogni $m \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=1}^{m} U_k = \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_{1/m}(x_0) \not\supset C$, cioè $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sarebbe un ricoprimento aperto di C privo di sottoricoprimenti finiti. Se invece C non fosse limitato chiaramente $(B_k(0))_{k \in \mathbb{N}}$ sarebbe un ricoprimento aperto di C privo di sottoricoprimenti finiti. □

Il teorema di Heine-Borel motiva la definizione seguente.

Definizione 1.42. Uno spazio topologico X è detto *compatto* se da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito.

In particolare tale definizione si applica a un sottoinsieme C di uno spazio topologico X, quando su C si consideri la *topologia relativa*, i cui aperti sono le intersezioni con C degli aperti di X (è immediato verificare che questa è effettivamente una topologia su C).

Per convincersi che questa sia la "giusta" (nel senso di utile) nozione di compattezza per spazi topologici, bisogna verificare che implichi una qualche forma della proprietà di Bolzano-Weierstrass. Ricordando che per spazi topologici generali il ruolo delle successioni è svolto dai net, siamo quindi condotti a introdurre la seguente nozione di sottonet.

Definizione 1.43. Sia $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ un net nello spazio topologico X. Un suo *sottonet* è un net $(y_\beta)_{\beta \in J}$, per il quale esista un'applicazione $f : J \to I$ tale che $y_\beta = x_{f(\beta)}$, e per ogni $\alpha \in I$ esista $\beta_\alpha \in J$ tale che $\beta \geq \beta_\alpha$ implichi $f(\beta) \geq \alpha$.

Quindi gli elementi $f(\beta)$, $\beta \in J$, sono definitivamente più grandi di ogni $\alpha \in I$. Che questa sia la corretta generalizzazione del concetto di sottosuccessione è mostrato nell'esercizio 1.32.

Teorema 1.44 (Bolzano-Weierstrass generalizzato)**.** *Uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni suo net ammette un sottonet convergente.*

Dimostrazione. Sia X compatto, e dato un net $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset X$ si definiscano gli insiemi aperti $U_\alpha := \overline{\{x_{\alpha'} : \alpha' \geq \alpha\}}^c$, $\alpha \in I$. Si ha allora che $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ non è un ricoprimento aperto di X: se lo fosse, per la compattezza di X esisterebbero $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$, il che equivale a $\bigcap_{i=1}^n \overline{\{x_{\alpha'} : \alpha' \geq \alpha_i\}} = \emptyset$, ma essendo I diretto si può prendere $\alpha \geq \alpha_1, \ldots \alpha_n$, e dunque $x_\alpha \in \bigcap_{i=1}^n \overline{\{x_{\alpha'} : \alpha' \geq \alpha_i\}}$. Pertanto esiste

$x \in (\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in I} \overline{\{x_{\alpha'} \,:\, \alpha' \geq \alpha\}}$ il che, per la proposizione 1.11, implica che per ogni U intorno di x e per ogni $\alpha \in I$ esista $x_{\alpha'} \in U$ con $\alpha' \geq \alpha$, cioè che x sia un punto limite di (x_α), e dunque che esista un sottonet di (x_α) convergente a x (esercizio 1.32).

Viceversa sia X uno spazio topologico in cui ogni net ammetta un sottonet convergente, e, per assurdo, sia $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ un ricoprimento aperto di X privo di sottoricoprimenti finiti. Dunque per ogni $F \in \mathscr{P}_0(I)$ esisterà $x_F \in (\bigcup_{\alpha\in F} U_\alpha)^c$. Ricordando allora che $\mathscr{P}_0(I)$ è diretto per inclusione (esempio 1.36(c)), il net $(x_F)_{F\in\mathscr{P}_0(I)}$ avrà un punto limite $x \in X$, e sarà $x \in U_{\bar\alpha}$ per qualche $\bar\alpha \in I$. Dunque $U_{\bar\alpha}$ è un intorno di x, e pertanto dovrà esistere $F \geq \{\bar\alpha\}$ tale che $x_F \in U_{\bar\alpha} \subset \bigcup_{\alpha\in F} U_\alpha$, il che contraddice la costruzione di x_F. □

Non è sorprendente, anche se di dimostrazione non immediata, il fatto che uno spazio metrico è compatto se e solo se da ogni sua *successione* si può estrarre una *sottosuccessione* convergente. (Si noti che il teorema precedente assicura soltanto che da una successione in uno spazio metrico compatto si può estrarre un sottonet convergente.)

Negli esercizi 1.33-1.37 sono enunciate diverse importanti proprietà degli spazi compatti e delle funzioni continue su di essi. In particolare l'esercizio 1.33 costituisce la generalizzazione del noto teorema di Weierstrass sulle funzioni reali continue su un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$.

Esercizi

1.1 Su $X := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, la palla unitaria in $\mathbb{R}^2$, si definisca

$$d(x,y) := \begin{cases} |x-y| & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono allineati con l'origine,} \\ |x|+|y| & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad x, y \in X$$

($|\cdot|$ norma euclidea in $\mathbb{R}^2$). Dimostrare che (X, d) è uno spazio metrico.

1.2 Siano (X, d) uno spazio metrico, $x \in X$ e $\delta > 0$. Dimostrare che le palle

$$B_\delta(x) := \{y \in X \,:\, d(x,y) < \delta\}, \qquad \bar B_\delta(x) := \{y \in X \,:\, d(x,y) \leq \delta\}$$

sono, rispettivamente, aperta e chiusa (nella topologia indotta da d).

1.3 Sia X un insieme di cardinalità n. Mostrare che $\mathscr{P}(X)$, l'insieme delle parti di X, ha cardinalità 2^n.

1.4 Siano X un insieme e B_α, $\alpha \in I$, una collezione di suoi sottoinsiemi (I insieme arbitrario di indici). Dimostrare la *dualità di De Morgan*:

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha^c.$$

1.5 Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che

(a) $\emptyset$, X sono chiusi;

(b) se C_α, $\alpha \in I$, sono chiusi, allora $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha$ è chiuso;

(c) se $C_1, \dots, C_n$ sono chiusi, allora $C_1 \cup \dots \cup C_n$ è chiuso.

1.6 Siano (X, d) uno spazio metrico, e $x \in X$. Verificare che le famiglie di insiemi

$$\mathscr{B}_x^1 := \{B_\delta(x) \,:\, \delta > 0\}, \quad \mathscr{B}_x^2 := \{\bar{B}_\delta(x) \,:\, \delta > 0\}, \quad \mathscr{B}_x^3 := \{B_{\delta_n}(x) \,:\, n \in \mathbb{N}\} \ (\delta_n \to 0),$$

sono basi di intorni di x.

1.7 Verificare che la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$\tau_\iota := \{(a, +\infty) \,:\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

definisce una topologia su $\mathbb{R}$ che non è di Hausdorff.

1.8 Siano (X, d) uno spazio metrico, $x \in X$ e $B \subset X$. Mostrare che x è un punto di accumulazione per B se e solo se esiste una successione $(x_j) \subset B \setminus \{x\}$ tale che $x_j \to x$.

1.9 Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e Δ l'insieme delle decomposizioni di $[a, b]$:

$$\delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b\}.$$

Si definisca su Δ una relazione $\leq$ dicendo che $\delta_1 \leq \delta_2$ se $\delta_1 \subset \delta_2$ (cioè δ_2 è ottenuta da δ_1 aggiungendo dei punti). Data inoltre $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann, si ponga

$$\sigma_\delta := \sum_{k=1}^{n} \Big(\inf_{[x_k, x_{k+1}]} f\Big)(x_{k+1} - x_k), \qquad \Sigma_\delta := \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{[x_k, x_{k+1}]} f\Big)(x_{k+1} - x_k).$$

Dimostrare che

(a) $(\Delta, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato diretto;

(b) $\lim_\delta \sigma_\delta = \lim_\delta \Sigma_\delta = \int_a^b f$ nel senso dei net in $\mathbb{R}$ (con la topologia usuale).

(Sugg.: f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che $\Sigma_\delta - \sigma_\delta < \varepsilon$.)

1.10 Siano (X, d) uno spazio metrico e $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ un net. Verificare che sono equivalenti

(a) $x_\alpha \to x$;

(b) $d(x_\alpha, x) \to 0$ come net in $\mathbb{R}$ (con la topologia usuale);

(c) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\alpha_\varepsilon \in I$ tale che se $\alpha \geq \alpha_\varepsilon$ allora $d(x_\alpha, x) < \varepsilon$.

In particolare, se $I = \mathbb{N}$ si ritrova la nozione di convergenza di una successione in uno spazio metrico.

1.11 Siano X, Y spazi metrici, $D \subset X$, x_0 punto di accumulazione per D e $f : D \to Y$. Verificare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se per ogni successione $(x_n) \subset D \setminus \{x_0\}$ tale che $x_n \to x$, si ha $f(x_n) \to \ell$.

1.12 Siano X, Y, Z spazi topologici, e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funzioni. Mostrare che se f è continua in $x_0 \in X$ e g è continua in $f(x_0) \in Y$ allora $g \circ f : X \to Z$ è continua in x_0.

1.13 Siano X, Y spazi topologici e $f : X \to Y$ funzione. Verificare che f è continua in X se e solo se per ogni chiuso $C \subset Y$, $f^{-1}(C)$ è un chiuso di X.

*1.14 Su $X = [0,1]$ si definisca una topologia dichiarando che $C \subset [0,1]$ è chiuso se e solo se è al più numerabile, o $C = X$. Dimostrare che $f : X \to \mathbb{R}$ è continua, se si dota l'immagine $\mathbb{R}$ della topologia usuale, se e solo se è costante.

1.15 Siano $X = C^1([a,b])$, $Y = C^0([a,b])$ e $D : X \to Y$ definito da $Df := f'$. Mostrare che:

(a) ponendo
$$\|f\|_{(1)} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \qquad f \in C^1([a,b]),$$
si definisce una norma su X;

(b) se su X si mette la norma $\|\cdot\|_{(1)}$ e su Y la norma $\|\cdot\|_\infty$, D è limitato e $\|D\| = 1$ (sugg.: considerare le funzioni $f(t) = e^{\alpha t}$ e fare $\alpha \to +\infty$);

(c) se si mette la norma $\|\cdot\|_\infty$ sia su X che su Y, D non è limitato (sugg.: considerare le funzioni $f_n(t) := \frac{\sin nt}{n}$).

1.16 Sia $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, con $\mathbb{C}^n$ dotato della norma euclidea, e si indichi con $\sigma(T)$ lo spettro di T. Dimostrare:

(a) se $T = \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ è diagonale, allora $\|T\| = \max_j |\lambda_j|$;

(b) se T è hermitiana ($T^* = T$), allora $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ (sugg.: se T è hermitiana, $T = UDU^*$ con D diagonale e $U^*U = UU^* = 1$);

(c) per T generica, $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T^*T)} |\lambda|^{1/2}$.

1.17 Dimostrare che su $X = C^1([a,b])$ la norma $\|f\|_{(1)} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ è strettamente più forte di $\|\cdot\|_\infty$ (cioè esiste $C > 0$ tale che $\|f\|_\infty \le C\|f\|_{(1)}$, ma non il viceversa).

1.18 Sia $(X, \|\cdot\|)$ normato. Verificare che $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$ per ogni $x, y \in X$.

1.19 Mostrare che su $X = \mathbb{C}^n$
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty, \qquad x \in \mathbb{C}^n.$$

1.20 Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi normati, e si consideri $X \times Y$ con la struttura di spazio vettoriale somma diretta (algebrica):
$$\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2) := (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2), \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, x_i \in X, y_i \in Y.$$
Verificare che ponendo
$$\|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\},$$
$$\|(x,y)\|_1 := \|x\|_X + \|y\|_Y,$$
$$\|(x,y)\|_2 := \left(\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2\right)^{1/2},$$
si ottengono norme su $X \times Y$ che sono topologicamente equivalenti. Lo spazio $X \times Y$, quando dotato di una di queste norme, si indica anche con $X \oplus Y$ e viene chiamato *(spazio normato) somma diretta* degli spazi normati X e Y.

1.21 Siano X, Y spazi normati con X finito-dimensionale, e $T : X \to Y$ lineare. Dimostrare che T è limitato.

1.22 Siano (X, d) uno spazio metrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente. Mostrare che (x_n) è di Cauchy.

1.23 Mostrare che uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ con X finito-dimensionale è di Banach.

1.24 Verificare che $\mathbb{R}$, con la metrica $d(x, y) = |e^x - e^y|$, non è completo (sugg.: considerare $x_n = -n$.)

1.25 Verificare che $(\ell^1(I), \|\cdot\|_1)$, $(\ell^2(I), \|\cdot\|_2)$ sono spazi normati.

1.26 Sia $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \subset \mathbb{R}_+$, I insieme di indici arbitrario. Mostrare che

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sup_{F\in\mathscr{P}_0(I)} \sum_{\alpha\in F} x_\alpha.$$

1.27 Mostrare che $(C^1([a, b]), \|\cdot\|_{(1)})$ è di Banach, mentre $(C^1([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ non lo è.

1.28 Sia (X, d) metrico. Verificare che $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$ per ogni $x, y, z \in X$.

1.29 Siano (X, d) uno spazio metrico completo e $C \subset X$ chiuso. Mostrare che, indicando con d_C la restrizione di d a $C \times C$ (detta la *metrica indotta* da d su C), (C, d_C) è uno spazio metrico completo.

*1.30 Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare:

(a) la relazione definita sull'insieme delle successioni di Cauchy di X da

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

è di equivalenza;

(b) indicata con $[(x_n)]$ la classe di equivalenza della successione di Cauchy $(x_n) \subset X$ secondo la relazione del punto (a), e con $\bar{X}$ l'insieme delle classi di equivalenza, l'applicazione $\bar{d} : \bar{X} \times \bar{X} \to \mathbb{R}_+$:

$$\bar{d}([(x_n)], [(y_n)]) := \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n), \qquad [(x_n)], [(y_n)] \in \bar{X},$$

è ben definita, cioè il limite esiste e non dipende dai rappresentanti scelti per le classi, ed è una metrica su $\bar{X}$ (sugg.: per l'esistenza del limite, usare l'esercizio 1.29);

(c) indicata, per ogni $x \in X$, con $j(x) \in \bar{X}$ la classe di equivalenza della successione costante $x_n = x$, $n \in \mathbb{N}$, l'applicazione $j : X \to \bar{X}$ così definita è isometrica (cioè $\bar{d}(j(x), j(y)) = d(x, y)$) e $j(X)$ è denso in $\bar{X}$ (cioè $\overline{j(X)} = \bar{X}$);

(d) $(\bar{X}, \bar{d})$ è uno spazio metrico completo, detto il *completamento* di (X, d) (sugg.: sia $(\bar{x}_n) \subset \bar{X}$ di Cauchy, e sia $(x_n) \subset X$ tale che $\bar{d}(j(x_n), \bar{x}_n) < 1/n$...);

(e) se $(\tilde{X}, \tilde{d})$ è uno spazio metrico completo e $k : X \to \tilde{X}$ è un'isometria con $k(X)$ denso in $\tilde{X}$, esiste un'isometria suriettiva $\phi : \bar{X} \to \tilde{X}$ tale che $\phi(j(x)) = k(x)$ per ogni $x \in X$ (*unicità del completamento*) (sugg.: si definisca prima $\phi : j(X) \to k(X)$ ponendo $\phi(j(x)) := k(x)$, allora ϕ è isometrica, poi $j(X)$ è denso in $\bar{X}$ e quindi...);

(f) sia $(X, \|\cdot\|)$ normato, e sul suo completamento $(\bar{X}, \bar{d})$ (considerando X come spazio metrico con la metrica indotta dalla norma), si ponga

$$\begin{aligned} \bar{x}+\bar{y} &:= \lim_{n\to+\infty} j(x_n+y_n), \\ \alpha\bar{x} &:= \lim_{n\to+\infty} j(\alpha x_n), \qquad\qquad \alpha\in\mathbb{C}, \bar{x}, \bar{y}\in\bar{X}; \\ \|\bar{x}\|^- &:= \lim_{n\to+\infty} \|x_n\|, \end{aligned}$$

dove $(x_n), (y_n) \subset X$ sono tali che $j(x_n) \to \bar{x}$, $j(y_n) \to \bar{y}$; allora le operazioni di spazio vettoriale e la norma su $\bar{X}$ sono ben defnite, $j : X \to \bar{X}$ è lineare, e $(\bar{X}, \|\cdot\|^-)$ è uno spazio di Banach la cui norma $\|\cdot\|^-$ è indotta da $\bar{d}$.

1.31 Siano X uno spazio normato e $V \subset X$ un sottospazio finito dimensionale. Verficare che V è chiuso.

1.32 Sia $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ un net in uno spazio topologico X. Un $x \in X$ è un *punto limite* per (x_α) se per ogni intorno U di x ed ogni $\alpha \in I$ esiste $\alpha' \geq \alpha$ tale che $x_{\alpha'} \in U$. Dimostrare:

(a) se esiste un sottonet $(y_\beta)_{\beta\in J}$ di (x_α) convergente a $x \in X$, allora x è un punto limite per (x_α);

(b) se $x \in X$ è un punto limite di (x_α), allora definendo un ordine parziale diretto su $J := \mathscr{I}_x \times I$ tramite

$$(U', \alpha') \geq (U, \alpha) \Leftrightarrow U' \subset U, \alpha' \geq \alpha,$$

e definendo $f : J \to I$ tramite $f(U, \alpha) := \alpha'$, dove $\alpha' \in I$ è tale che $\alpha' \geq \alpha$ e $x_{\alpha'} \in U$, si ha che $(x_{f(\beta)})_{\beta\in J}$ è un sottonet di (x_α) convergente a x.

In sostanza: (x_α) ammette un sottonet convergente a x se e solo se x è un suo punto limite.

1.33 Siano X, Y spazi topologici con X compatto, e $f : X \to Y$ continua. Mostrare che allora $f(X)$ è compatto in Y (con la topologia relativa).

1.34 Sia X compatto e $C \subset X$ chiuso. Mostrare che allora C è compatto (con la topologia relativa).

1.35 Sia X spazio di Hausdorff e $K \subset X$ compatto. Mostrare che allora K è chiuso.

1.36 Siano X compatto, Y di Hausdorff e $f : X \to Y$ continua e biunivoca. Mostrare che allora $f^{-1} : Y \to X$ è continua.

1.37 Sia X spazio normato di dimensione infinita, e $K \subset X$ compatto. Mostrare che K ha interno vuoto.

Capitolo 2

Richiami di teoria dell'integrazione alla Lebesgue

Il difetto principale della teoria di integrazione di Riemann è che non permette di effettuare il passaggio al limite sotto il segno di integrale con sufficiente generalità. In particolare, non garantisce che se una successione (limitata) di funzioni continue (e quindi integrabili) converge puntualmente, allora la funzione limite è integrable e il suo integrale è il limite degli integrali delle funzioni della successione data, cosa che sarebbe assai naturale aspettarsi. Questo problema è alla radice del fatto, visto nell'esempio 1.36(d) del capitolo precedente, che gli spazi di funzioni continue non sono completi nelle norme $\|\cdot\|_p$ ($p = 1, 2$) il che, nelle applicazioni concrete, è assai sgradevole, come si capirà meglio in seguito.

La necessità di disporre di una teoria dell'integrazione che non presentasse tali svantaggi è stato il principale motivo che ha indotto Lebesgue a cercare di generalizzare la teoria di Riemann. L'idea centrale di Lebesgue è stata quella di definire l'integrale come limite di somme ottenute suddividendo il codominio della funzione da integrare, invece che il suo dominio come nella definizione di Riemann. Poiché la controimmagine di un intervallo tramite una funzione continua non è necessariamente un intervallo, per poter procedere in questo modo è necessario preliminarmente definire la "lunghezza", o "misura" di insiemi sufficientemente generali. Questo conduce a una *teoria della misura* per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ (o di $\mathbb{R}^n$), la cui formulazione è però tale da consentire una naturale e immediata generalizzazione a spazi metrici o topologici, o a insiemi ancora più generali.

In questo capitolo esporremo dunque i principali risultati delle teoria della misura (sez. 2.1) e dell'integrazione (sez. 2.2) alla Lebesgue, per lo più limitandoci, per brevità, ai soli enunciati, e alle dimostrazioni di quelli riguardanti gli spazi di funzioni integrabili (sez. 2.3), che sono di maggiore interesse dal punto di vista dell'Analisi Funzionale. Il capitolo è quindi inteso più che altro come un modo di stabilire un linguaggio e delle notazioni, e come un riferimento rapido a risultati utilizzati nella parte principale del corso per gli studenti che conoscano già gli aspetti fondamentali della teoria. Non bisogna pertanto aspettarsi di poterne comprendere a fondo le idee e le tecniche leggendo solo quanto segue. Chi volesse appronfondire questi temi è invitato a consultare i molti ottimi testi sull'argomento, a cominciare da [Rud1], su cui è basata essenzialmente la nostra esposizione.

2.1 Teoria della misura

Dovendo essere una generalizzazione delle nozioni di lunghezza, area o volume di semplici sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$), quali intervalli, rettangoli ecc., una misura sarà, a grandi linee, una applicazione a valori non negativi definita su certi sottoinsiemi di un insieme X dato. Cominciamo dunque con l'introdurre opportune famiglie di sottoinisiemi di X, che serviranno da domini per le misure che considereremo. Per il momento non supporremo alcuna struttura sull'insieme X, che sarà dunque assolutamente arbitrario.

Definizione 2.1. Sia X un insieme. Una famiglia $\mathfrak{R} \subset \mathscr{P}(X)$ è detta un *anello (di insiemi)* se

(i) $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{R}$;

(ii) $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{R}$.

Un anello $\mathfrak{R}$ è detto un'*algebra (di insiemi)* se $X \in \mathfrak{R}$.

Un'algebra $\mathfrak{M} \subset \mathscr{P}(X)$ è detta una σ-*algebra* se per ogni successione $(A_k)_{k\subset\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$ si ha $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{M}$.

Equivalentemente, $\mathfrak{M} \subset \mathscr{P}(X)$ è una σ-algebra se vale: $X \in \mathfrak{M}$, $A \in \mathfrak{M} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{M}$, $(A_k) \subset \mathfrak{M} \Rightarrow \bigcup_k A_k \in \mathfrak{M}$.

Precisiamo ora la nozione di misura accennata sopra.

Definizione 2.2. Sia X un insieme.

(i) Una *misura su un anello* $\mathfrak{R} \subset \mathscr{P}(X)$ è un'applicazione $\mu : \mathfrak{R} \to [0, +\infty]$ tale che

$$A, B \in \mathfrak{R},\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{(additività di } \mu\text{)}.$$

(ii) Una *misura su una* σ-*algebra* $\mathfrak{M} \subset \mathscr{P}(X)$ è un'applicazione $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ tale che

$$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M},\ A_k \cap A_j = \emptyset \text{ se } k \neq j \Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k)$$

(σ-additività di μ).

Come vedremo nella prossima sezione, allo scopo di definire l'integrale di Lebesgue è necessario disporre di una misura su una σ-algebra. L'introduzione della nozione di misura additiva su un anello è dovuta al fatto che in molti casi interessanti, mentre è complicato descrivere esplicitamente una σ-algebra rilevante e definire direttamente una misura σ-additiva su di essa, è relativamente facile ottenere una misura su un anello opportuno. Quest'ultima si estende poi a una misura σ-additiva utilizzando il teorema di estensione di Lebesgue 2.8 di seguito. In particolare questo è il procedimento che, come vedremo subito, si usa per definire la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ a partire dal "volume" dei parallelepipedi n-dimensionali.

Definizione 2.3. Un *intervallo* $I \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme della forma $I = J_1 \times \cdots \times J_n$, con $J_i \subset \mathbb{R}$ intervallo limitato (aperto, semiaperto o chiuso, eventualmente vuoto), $i = 1, \ldots, n$. La sua misura è

$$m(I) := \prod_{i=1}^{r} |J_i|,$$

dove $|J_i|$ è la lunghezza dell'intervallo J_i.

Un *insieme elementare, o plurintervallo*, $E \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme della forma $E = \bigcup_{k=1}^{r} I_k$, con $I_k \subset \mathbb{R}^n$ intervallo, $k = 1, \ldots, r$.

La dimostrazione della proposizione seguente, che non daremo, è probabilmente già nota dai corsi di Calcolo, in quanto alla base della teoria dell'integrazione di Riemann in più dimensioni, ed è comunque di facile intuizione almeno nei casi $n = 1, 2, 3$, in cui basta fare qualche disegno.

Proposizione 2.4. *(i) La famiglia $\mathfrak{E} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ degli insiemi elementari è un anello.*

(ii) Per ogni $E \in \mathfrak{E}$ esistono $I_1, \ldots, I_r \subset \mathbb{R}^n$ intervalli disgiunti tali che $E = \bigcup_{k=1}^{r} I_k$.

(iii) Dato $E \in \mathfrak{E}$ e intervalli disgiunti $I_1, \ldots, I_r \subset \mathbb{R}^n$ tali che $E = \bigcup_{k=1}^{r} I_k$, il numero

$$m(E) := \sum_{k=1}^{r} m(I_k)$$

è indipendente dalla decomposizione di E in intervalli disgiunti, ed è detto la misura *di E.*

(iv) m è additiva su $\mathfrak{E}$ (e quindi è effettivamente una misura).

(v) m è regolare*, cioè per ogni $E \in \mathfrak{E}$ e $\varepsilon > 0$ esistono $A, C \in \mathfrak{E}$, A aperto e C chiuso, tali che*

$$C \subset E \subset A, \qquad m(A) - \varepsilon < m(E) < m(C) + \varepsilon.$$

Osservazione 2.5. Data una funzione monotona non decrescente e continua a destra $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esiste il limite $F(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} F(x)$, e si può dunque definire un'applicazione non negativa m_F sull'insieme degli intervalli limitati tramite

$$\begin{aligned}
m_F((a,b]) &:= F(b) - F(a),\\
m_F([a,b)) &:= F(b^-) - F(a^-),\\
m_F((a,b)) &:= F(b^-) - F(a),\\
m_F([a,b]) &:= F(b) - F(a^-).
\end{aligned}$$

Nel caso particolare $F(\lambda) = \lambda$, $m_F(I)$ è proprio la lunghezza dell'intervallo I. Si vede allora facilmente, come nella proposizione precedente, che m_F si estende a una misura regolare sugli insiemi elementari di $\mathbb{R}$.

La proposizione 2.4 rappresenta il primo passo – la definizione di una misura su un anello – nella strategia di estensione delineata sopra per ottenere la misura di Lebesgue. Per eseguire il secondo passo abbiamo bisogno ancora di alcune definizioni.

Definizione 2.6 (misura esterna di Lebesgue)**.** Sia μ una misura regolare sugli insiemi elementari $\mathfrak{E} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ che sia finita (cioè $\mu(E) < +\infty$ per ogni $E \in \mathfrak{E}$). La *misura esterna* μ^* associata a μ è un'applicazione $\mu^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ definita da

$$\mu^*(A) := \inf\Big\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(E_k) \; : \; A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k,\ E_k \in \mathfrak{E} \text{ aperti}\Big\}, \qquad A \subset \mathbb{R}^n.$$

Dati insiemi $A, B \subset \mathbb{R}^n$, ricordiamo che la loro *differenza simmetrica* è l'insieme $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Definizione 2.7 (insiemi misurabili secondo Lebesgue)**.** Sia μ una misura regolare finita sugli insiemi elementari $\mathfrak{E} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$. Posto

$$\mathfrak{M}_F(\mu) := \{A \subset \mathbb{R}^n \; : \; \forall \varepsilon > 0,\, \exists E \in \mathfrak{E} \; : \; \mu^*(A \Delta E) < \varepsilon\},$$

la famiglia degli *insiemi misurabili secondo Lebesgue* è definita da

$$\mathfrak{M}(\mu) := \Big\{ A \subset \mathbb{R}^n \; : \; \exists (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}_F(\mu),\ A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \Big\}.$$

Teorema 2.8 (estensione di Lebesgue)**.** *La famiglia $\mathfrak{M}(\mu)$ è una σ-algebra, e $\mu^*|_{\mathfrak{M}(\mu)}$ è l'unica misura σ-additiva che estende μ a $\mathfrak{M}(\mu)$. Tale misura si denota ancora con μ.*

La dimostrazione del teorema, che omettiamo, consiste essenzialmente nel verificare che $d(A, B) := \mu^*(A \Delta B)$ è una metrica su (classi di equivalenza di elementi di) $\mathfrak{E}$, e che $\mathfrak{M}(\mu)$ è il completamento di $\mathfrak{E}$ rispetto a essa.

Applicando il teorema di estensione 2.8 alla misura m su $\mathfrak{E}$ fornita dalla proposizione 2.4 si ottiene la *misura di Lebesgue* m su $\mathbb{R}^n$, e applicandolo alle misure m_F dell'osservazione 2.5 si ottengono le *misure di Lebesgue-Stieltjes* su $\mathbb{R}$, che interverranno in seguito nella discussione del teorema spettrale per operatori autoaggiunti.

Allo scopo di descrivere un po' più in dettaglio gli insiemi misurabili di quanto non faccia la definizione, introduciamo una classe notevole di σ-algebre in spazi topologici.

Definizione 2.9. Sia X uno spazio topologico. La σ-algebra $\mathfrak{B}(X)$ degli *insiemi boreliani* di X è la più piccola σ-algebra su X contenente tutti gli aperti, cioè l'intersezione di tutte le σ-algebre su X che contengono tutti gli aperti.

La verifica delle affermazioni della precedente definizione è lasciata al lettore (esercizio 2.1).

La seguente proposizione segue facilmente dalla proprietà di regolarità di una misura sugli insiemi elementari.

Proposizione 2.10. *Sia μ una misura regolare finita su $\mathfrak{E} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$. Si ha $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}(\mu)$ e per ogni $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ esistono $F, G \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, con F unione numerabile di chiusi e G intersezione numerabile di aperti, tali che*

$$F \subset A \subset G, \qquad \mu(A \setminus F) = 0 = \mu(G \setminus A).$$

Insiemi del tipo degli insiemi F e G della proposizione precedente vengono detti insiemi F_σ e G_δ rispettivamente. Dunque un insieme misurabile secondo Lebesgue differisce da un F_σ e da un G_δ per un insieme di misura nulla. In particolare, tutti gli aperti e tutti i chiusi (nonché tutti gli F_σ e gli G_δ, tutte le intersezioni numerabili di F_σ e le unioni numerabili di G_δ, ecc.) sono misurabili.

D'altra parte esistono insiemi non misurabili secondo Lebesgue, ma, come ci si può facilmente aspettare dalle osservazioni appena fatte, tali insiemi non sono "costruibili" utilizzando le normali procedure della teoria degli insiemi, e la dimostrazione della loro esistenza richiede l'utilizzo dell'assioma della scelta.

L'esercizio 2.2 fornisce esempi di insiemi misurabili secondo Lebesgue, ma non secondo Peano-Jordan, con interno vuoto e misura positiva, o densi (in un intervallo) e con misura arbitrariamente piccola. (Ricordiamo che $A \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Peano-Jordan se posto

$$m_i(A) := \sup\{m(E) \,:\, E \in \mathfrak{E},\, E \subset A\}, \quad m_e(A) := \inf\{m(E) \,:\, E \in \mathfrak{E},\, E \supset A\},$$

si ha $m_i(A) = m_e(A)$.)

Concludiamo la sezione menzionando che una misura su uno spazio topologico X che soddisfi le analoghe delle proprietà nella tesi della proposizione 2.10 è detta un *misura di Borel regolare* su X.

2.2 Teoria dell'integrazione

La teoria di Lebesgue, richiamata nella sezione precedente, permette di dare un senso alla misura di sottoinsiemi molto generali di $\mathbb{R}^n$. Ci si può dunque aspettare che si possa utilizzare per ottenere una teoria dell'integrazione molto più flessibile di quella di Riemann, basata essenzialmente sugli insiemi elementari. Esporremo ora i risultati fondamentali di tale teoria. Poiché questi dipendono in realtà soltanto dalle proprietà formali di una misura (cioè essenzialmente dalla σ-additività), procederemo in modo astratto, assumendo che sia data una misura su un insieme privo di altre strutture. Otterremo così una teoria che copre, oltre alla misura di Lebesgue, molti altri casi interessanti e che ci saranno utili in seguito.

Cominciamo anche qui con alcune definizioni.

Definizione 2.11. Uno *spazio di misura* è una terna $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, dove X è un insieme, $\mathfrak{M} \subset \mathscr{P}(X)$ una σ-algebra e μ una misura definita su $\mathfrak{M}$. Gli insiemi $A \in \mathfrak{M}$ sono detti *insiemi misurabili.*

Esempi 2.12. (a) Se m è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ e $\mathfrak{M}(m)$ è la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, teorema 2.8, $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}(m), m)$ è uno spazio di misura. Analogamente per le misure di Lebesgue-Stieltjes m_F.

(b) Sia X un insieme. Dato $x \in X$ si definisca $\delta_x : \mathscr{P}(X) \to [0,1]$ tramite

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases} \qquad A \subset X.$$

È chiaro che δ_x è una misura su X, detta *misura di Dirac (concentrata in x)*. Dunque $(X, \mathscr{P}(X), \delta_x)$ è uno spazio di misura.

(c) Sia X un insieme. Si definisca $\mu_\sharp : \mathscr{P}(X) \to [0,+\infty]$ tramite

$$\mu_\sharp(A) := \begin{cases} \sharp A & \text{se } A \text{ è finito}, \\ +\infty & \text{se } A \text{ è infinito}, \end{cases} \qquad A \subset X.$$

Anche in questo caso si verifica subito che $\mu_\sharp$ è una misura, detta la *misura che conta* in X, e pertanto $(X, \mathscr{P}(X), \mu_\sharp)$ è uno spazio di misura.

In tutto il resto di questa sezione, salvo diverso avviso, $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ denoterà uno spazio di misura.

Definizione 2.13. Una funzione $f : X \to \tilde{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$ è detta *misurabile* se $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \in \mathfrak{M}$ per ogni $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Analogamente una funzione $f : X \to Y$, Y spazio topologico, è detta *misurabile* se $f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$ per ogni $B \in \mathfrak{B}(Y)$.

Si noti l'analogia tra la nozione di funzione misurabile e quella di funzione continua tra spazi topologici, nella formulazione del teorema 1.26. Si osservi anche che la misurabilità di una funzione non dipende realmente dalla misura μ, ma solo dalla σ-algebra $\mathfrak{M}$ su cui essa è definita.

Introduciamo alcune notazioni brevi molto utili quando si ha a che fare con funzioni misurabili. Data una funzione $f : X \to Y$ e $B \subset Y$ si porrà $\{f \in B\} := f^{-1}(B)$, e in particolare se $Y = \tilde{\mathbb{R}}$ scriveremo $\{f > a\}$ al posto di $f^{-1}((a,+\infty])$ (e analogamente per $\{f < a\}$, $\{f \geq a\}$, $\{f \leq a\}$).

Le principali proprietà delle funzioni misurabili sono raccolte nel teorema seguente. La dimostrazione di alcune di esse è lasciata al lettore (esercizio 2.3).

Teorema 2.14. *Valgono le seguenti affermazioni:*

(i) $f : X \to \mathbb{C}$ *è misurabile se e solo se* $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : X \to \mathbb{R}$ *sono misurabili;*

(ii) $f : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ *è misurabile* $\Leftrightarrow \{f > a\} \in \mathfrak{M}$ *per ogni* $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{f \geq a\} \in \mathfrak{M}$ *per ogni* $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{f < a\} \in \mathfrak{M}$ *per ogni* $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{f \leq a\} \in \mathfrak{M}$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$;

(iii) se $f : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ *è misurabile anche* $|f|$ *lo è;*

(iv) se $f_n : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ *è misurabile per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *allora* $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$ *sono misurabili;*

(v) se $f_n : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ *è misurabile per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *allora* $E := \{x \in X : \exists f(x) := \lim_{n\to+\infty} f(x)\} \in \mathfrak{M}$ *e* $f : E \to \tilde{\mathbb{R}}$ *è misurabile (rispetto alla σ-algebra* $\mathfrak{M}_E := \{F \cap E : F \in \mathfrak{M}\}$ *su* E*).*

(vi) se $f, g : X \to \mathbb{R}$ sono misurabili, allora $f + g, f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ sono misurabili.

Dunque, come nel caso degli insiemi, tutte le operazioni fondamentali dell'Analisi applicate a funzioni misurabili danno luogo a funzioni misurabili. Osserviamo però esplicitamente che le proprietà (iv) e (v) non si estendono al caso dei net di funzioni misurabili (com'è facile attendersi a partire dal fatto che una σ-algebra è stabile per operazioni su famiglie soltanto numerabili di insiemi).

Introduciamo ora una classe particolare di funzioni misurabili, che giocano, nella teoria di Lebesgue, il ruolo che le funzioni a gradino giocano in quella di Riemann.

Definizione 2.15. Una funzione misurabile $s : X \to \mathbb{R}$ è detta una *funzione semplice* se l'insieme dei suoi valori $s(X) \subset \mathbb{R}$ è finito.

Equivalentemente $s : X \to \mathbb{R}$ è misurabile semplice se è della forma

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k},$$

dove $\{c_1, \dots, c_n\} = s(X)$ sono i valori assunti da s, $E_k := \{s = c_k\} \in \mathfrak{M}$ è l'insieme su cui s ha valore c_k, e χ_{E_k} è la funzione caratteristica dell'insieme E_k (cioè la funzione che vale 1 su E_k e 0 altrove, si noti che χ_E è misurabile se e solo se $E \in \mathfrak{M}$). In tal caso, si ha chiaramente che $E_h \cap E_k = \emptyset$ se $h \neq k$, e $X = \bigcup_{k=1}^n E_k$, cioè gli insiemi E_k, $k = 1, \dots, n$, formano una *partizione misurabile* di X. È poi chiaro che somme e prodotti di funzioni semplici sono semplici.

Il risultato seguente è il fondamento di tutta la teoria dell'integrazione di Lebesgue.

Teorema 2.16. *Sia $f : X \to \mathbb{C}$ misurabile. Esiste una successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni misurabili semplici che converge puntualmente a f su X.*

Cenno di dimostrazione. Sia $f \geq 0$. Definendo gli insiemi misurabili

$$E_{n,k}. := \left\{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\right\}, \quad F_n := \{f \geq n\}, \qquad n \in \mathbb{N},\, k = 1, \dots, n2^n,$$

e ponendo

$$s_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + n\chi_{F_n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

si ottiene una successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni misurabili semplici tali che $s_1(x) \leq s_2(x) \leq \dots \leq f(x)$ e $\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in X$.

Nel caso generale, posto $f_1 := \operatorname{Re} f$, $f_2 := \operatorname{Im} f$ si considerino le funzioni misurabili non negative $f_i^+ := \max\{f_i, 0\}$, $f_i^- := -\min\{f_i, 0\}$ (parte positiva e negativa di f_i rispettivamente), $i = 1, 2$. Si ha allora $f = (f_1^+ - f_1^-) + i(f_2^+ - f_2^-)$, e definite le funzioni misurabili semplici $s_{i,n}^{\pm}$ a partire da $f_i^{\pm}$ come sopra, e posto $s_n := (s_{1,n}^+ - s_{1,n}^-) + i(s_{2,n}^+ - s_{2,n}^-)$, ne segue che s_n è semplice e $s_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in X$. □

Come si vede, l'idea della dimostrazione precedente è quella di partizionare il codominio di $f \geq 0$ in intervalli di ampiezza $1/2^n$ e di approssimare quindi f con una funzione costante sulla loro controimmagine tramite f. Come già notato all'inizio del capitolo, affinché tale ribaltamento di prospettiva rispetto a quella di Riemann sia sensato e utile è necessario che gli insiemi risultanti, che possono essere assai complicati anche se f è molto regolare, siano misurabili per una classe di funzioni f sufficientemente ampia, il che è garantito dalla notevole generalità della nozione di misurabilità di Lebesgue.

A questo punto siamo nella condizione di dare la definizione di integrale, cominciando da quello delle funzioni semplici, e poi usando questo per definire, per approssimazione, quello di funzioni via via più generali.

Definizione 2.17. (i) L'integrale di una funzione misurabile semplice $s = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}$ è

$$\int_X s\, d\mu := \sum_{k=1}^n c_k \mu(E_k).$$

(ii) L'integrale di una funzione misurabile non negativa $f : X \to [0, +\infty]$ è il numero in $[0, +\infty]$ definito da

$$\int_X f\, d\mu := \sup \Big\{ \int_X s\, d\mu \ :\ s \text{ semplice, } 0 \le s \le f \Big\}.$$

(iii) L'integrale di una funzione misurabile $f : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ è il numero in $\tilde{\mathbb{R}}$ definito da

$$\int_X f\, d\mu := \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu,$$

a patto che almeno uno dei due integrali a secondo membro sia finito.

(iv) Una funzione misurabile $f : X \to \mathbb{C}$ è detta *integrabile (secondo Lebesgue)* se $\int_X |f| d\mu < +\infty$, e il suo integrale è il numero complesso definito da

$$\int_X f\, d\mu := \int_X \mathrm{Re}\, f\, d\mu + i \int_X \mathrm{Im}\, f\, d\mu.$$

L'insieme delle funzioni integrabili è denotato $L^1(X, \mu)$ (o $L^1(X)$, o semplicemente L^1, quando non ci sia rischio di confusione).

Notiamo che se $f \in L^1(X, \mu)$, $f = f_1 + i f_2$ (f_1, f_2 reali), si ha $f_i^\pm \le |f_i| \le |f|$, $i = 1, 2$, e dunque, per il punto (ii) della proposizione 2.19 seguente, $\int_X f_i^\pm d\mu \le \int_X |f| d\mu < +\infty$, per cui la definizione di $\int_X f d\mu$ data al punto (iv) è sensata.

Dato un insieme $E \in \mathfrak{M}$, si porrà anche $\int_E f\, d\mu := \int_X \chi_E f\, d\mu$. Quando non ci sia ambiguità, si potrà utilizzare la notazione semplificata $\int_X f$ al posto di $\int_X f d\mu$, mentre quando sia necessario specificare l'espressione di f si utilizzerà la notazione $\int_X f(x)\, d\mu(x)$. In particolare se $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Lebesgue si scriverà $\int_E f(x)\, d^n x$ invece che $\int_E f(x)\, dm(x)$ per indicare l'integrale fatto rispetto alla misura di Lebesgue m su $\mathbb{R}^n$, e nel caso $n = 1$ e $E = [a, b]$ (o $(a, b), (a, b], [a, b)$) si userà la notazione classica $\int_a^b f(x)\, dx$ (o solo $\int_a^b f$).

Esempio 2.18. Su $X = [0,1]$, con la misura di Lebesgue m, la funzione $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ è misurabile, in quanto funzione caratteristica di $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ che è unione numerabile di insiemi costituiti da un solo punto, che sono quindi chiusi. Inoltre f è semplice (è una funzione caratteristica) e il suo integrale è dunque

$$\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}} = 0 \cdot m([0,1] \setminus \mathbb{Q}) + 1 \cdot m([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0,$$

poiché $m(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$ ($\{x\} = [x,x]$ è un intervallo) e m è σ-additiva. Ricordiamo che f è il tipico esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.

È chiaro che gli insiemi di misura nulla sono in qualche modo trascurabili nella teoria dell'integrazione: ad esempio se $f, g \geq 0$ sono funzioni misurabili che differiscono soltanto su un insieme di misura nulla si vede facilmente dalla definizione che $\int_X f = \int_X g$. È allora conveniente introdurre la seguente terminologia: si dice che una proprietà $P(x)$, dipendente da $x \in X$, è vera *quasi ovunque (rispetto a μ)* (abbreviato q.o.), se l'insieme $\{x \in X \, : \, P(x) \text{ è falsa}\}$ è di misura nulla.

Le principali proprietà dell'integrale di Lebesgue sono enunciate nella proposizione seguente. Omettiamo o lasciamo al lettore (esercizio 2.4) la loro dimostrazione.

Proposizione 2.19. *Siano f, g funzioni misurabili su X (a valori in $\tilde{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$). Si ha:*

(i) *se $f, g \in L^1$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, allora $\alpha f + \beta g \in L^1$ e $\int_X (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_X f + \beta \int_X g$ (linearità dell'integrale);*

(ii) *se $f \leq g$, allora $\int_X f \leq \int_X g$ (monotonia dell'integrale);*

(iii) $|\int_X f| \leq \int_X |f|$;

(iv) *se $f \geq 0$ e $\int_X f \, d\mu = 0$, allora $f = 0$ q.o.;*

(v) *se $f \in L^1(X, \mu)$ e $\int_E f \, d\mu = 0$ per ogni $E \in \mathfrak{M}$, allora $f = 0$ q.o.;*

(vi) *se $\int_X |f| d\mu < +\infty$, allora $|f| < +\infty$ q.o.*

Enunciamo ora, senza dimostrarli, i fondamentali teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, che garantiscono che le patologie della teoria di Riemann, ricordate all'inizio del capitolo, sono superate.

Teorema 2.20 (convergenza monotona di Levi)**.** *Siano $f_n, f : X \to [0, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni misurabili tali che $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq ...$ e $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ per quasi ogni $x \in X$. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Lemma 2.21 (Fatou)**.** *Siano $f_n : X \to [0, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni misurabili. Posto*

$$f(x) := \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} f_k(x), \qquad x \in X,$$

si ha

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Si noti che la f dell'enunciato precedente è misurabile per il teorema 2.14.

Teorema 2.22 (convergenza dominata di Lebesgue). *Siano $f_n, f : X \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni misurabili tali che*

(i) $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ *per q.o.* $x \in X$*;*

(ii) esiste $g \in L^1(X, \mu)$ tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per q.o. $x \in X$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Notiamo esplicitamente che da questo segue, per la proposizione 2.19(iii),

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Un altro risultato interessante è la seguente semplice caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann, che, stranamente, è possibile solo nella teoria di Lebesgue (il che costituisce l'ennesimo svantaggio della teoria di Riemann).

Teorema 2.23 (Vitali-Lebesgue). *Una funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla secondo Lebesgue. Inoltre in tal caso $f \in L^1([a, b])$, e gli integrali secondo Riemann e secondo Lebesgue di f coincidono.*

Concludiamo questa sezione enunciando la generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo per gli integrali di Lebesgue.

Teorema 2.24 (fondamentale del calcolo). *Data $f \in L^1([a, b])$ e posto*

$$F(x) := \int_a^x f(t) \, dt, \qquad x \in [a, b], \tag{2.1}$$

si ha che esiste $F'(x) = f(x)$ per q.o. $x \in [a, b]$.

Viceversa se $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ è tale che esista $F'(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, e $F' \in L^1([a, b])$, allora

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) \, dt, \qquad x \in [a, b]. \tag{2.2}$$

Osservazioni. (a) Si possono costruire funzioni $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che $g'(x) = 0$ per q.o. $x \in [a, b]$ ma non costanti (e non derivabili *per ogni* $x \in [a, b]$). Pertanto le "primitive" di una $f \in L^1([a, b])$ (come ad esempio la F della (2.1)) non differiscono tra loro soltanto per una costante, come per le funzioni continue.

(b) Questo mostra anche che per la validità della (2.2) non basta assumere soltanto che F' esista quasi ovunque.

2.3 Spazi L^p

Anche in questa sezione, salvo diverso avviso, $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ denoterà un generico spazio di misura.

Definizione 2.25. Sia $p \geq 1$. Indicheremo con $L^p(X, \mu)$ lo spazio delle funzioni misurabili $f : X \to \mathbb{C}$ tali che

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} < +\infty.$$

In base alla proposizione 2.19(iv), se $\|f\|_p = 0$ allora $f = 0$ q.o. D'altra parte si è già osservato che gli insiemi di misura nulla sono trascurabili nell'integrazione, e pertanto d'ora in poi due funzioni f e g uguali quasi ovunque verranno identificate. A stretto rigore, allora, gli elementi di L^p saranno classi di equivalenza di funzioni uguali quasi ovunque, anche se, per semplicità, e ove questo non crei ambiguità, continueremo a pensarli come funzioni.

Tenendo presente quest'ultima osservazione, si ha il risultato seguente.

Proposizione 2.26. *$(L^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$ è uno spazio normato per ogni $p \geq 1$.*

Dimostrazione. Il caso $p = 1$ segue immediatamente dalla disuguaglianza $|f + g| \leq |f| + |g|$ e dalla monotonia dell'integrale.

Per $p = 2$, l'unica cosa da verificare è che date $f, g \in L^2$ si abbia $f + g \in L^2$ e valga la disuguaglianza triangolare $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$. Si ha, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \int_X (|f| + \lambda |g|)^2 \, d\mu = \|f\|_2^2 + 2\lambda \int_X |fg| \, d\mu + \lambda^2 \|g\|_2^2,$$

da cui, essendo l'ultimo membro un polinomio quadratico in λ,

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Ne segue che $fg \in L^1$, e usando allora 2.19(iii) si conclude come nell'esempio 1.2(f).

Omettiamo la dimostrazione nei casi $p \neq 1, 2$. Il lettore interessato può trovarla ad esempio su [Rud2]. $\square$

Nel seguito avremo spesso a che fare anche con il caso $p = \infty$.

Definizione 2.27. Una funzione misurabile $f : X \to \mathbb{C}$ è detta *essenzialmente limitata* se esiste $M \geq 0$ tale che l'insieme $\{|f| > M\}$ ha misura nulla. La quantità

$$\|f\|_\infty := \inf\{M \geq 0 \, : \, \mu(\{|f| > M\}) = 0\}$$

è detta *estremo superiore essenziale* di f. L'insieme delle funzioni essenzialmente limitate si denota con $L^\infty(X, \mu)$.

È facile verificare, sempre identificando tra loro funzioni uguali quasi ovunque, che $(L^\infty(X,\mu), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio normato (esercizio 2.5).

Come già ricordato, il risultato seguente è di importanza fondamentale, e, a posteriori, motiva praticamente da solo la teoria dell'integrazione di Lebesgue.

Teorema 2.28 (Riesz-Fisher)**.** *$(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$ è uno spazio di Banach per ogni $p \in [1,+\infty]$.*

Dimostrazione. Sia $p \in [1,+\infty)$. Data una successione di Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$, si fissi $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq n_1$ si abbia $\|f_n - f_m\|_p < 1/2$. Sarà poi possibile trovare $n_2 \geq n_1$ tale che per ogni $n, m \geq n_2$ si abbia $\|f_n - f_m\|_p < 1/4$, e d'altra parte $\|f_{n_1} - f_{n_2}\|_p \leq 1/2$. Procedendo induttivamente in questo modo si determina allora una sottosuccessione $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < \frac{1}{2^k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Si definiscano poi le funzioni a valori in $[0,+\infty]$

$$\left.\begin{aligned} g_r(x) &:= \sum_{k=1}^{r} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|, \\ g(x) &:= \lim_{r\to+\infty} g_r(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|, \end{aligned}\right. \qquad x \in X.$$

Essendo $\|\cdot\|_p$ una norma si avrà dunque

$$\|g_r\|_p \leq \sum_{k=1}^{r} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{2^k} < 1,$$

e quindi, per il lemma di Fatou 2.21,

$$\|g\|_p^p = \int_X |g|^p \, d\mu = \int_X \lim_{r\to+\infty} |g_r|^p \, d\mu \leq \liminf_{r\to+\infty} \int_X |g_r|^p \, d\mu = \liminf_{r\to+\infty} \|g_r\|_p^p \leq 1,$$

da cui $g(x) < +\infty$ per q.o. $x \in X$ (proposizione 2.19(vi)). Ne segue che è possibile definire una funzione misurabile $f : X \to \mathbb{C}$ tramite

$$f(x) := f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)\big),$$

in quanto la serie nel membro di destra è assolutamente convergente per q.o. $x \in X$ (e si può ad esempio porre $f(x) = 0$ per gli x in cui non converge), e la somma di una serie di funzioni misurabili è misurabile per il teorema 2.14. Ma allora, osservando che la serie che definisce f è telescopica, si avrà, per q.o. $x \in X$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f_{n_1}(x) + \lim_{r\to+\infty} \sum_{k=1}^{r} \big(f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)\big) \\ &= f_{n_1}(x) + \lim_{r\to+\infty} \big(f_{n_r}(x) - f_{n_1}(x)\big) = \lim_{r\to+\infty} f_{n_r}(x), \end{aligned}$$

e dato allora $\varepsilon > 0$ e $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che se $m, n > n_\varepsilon$ allora $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$, si otterrà, ancora grazie al lemma di Fatou,

$$\int_X |f - f_m|^p \, d\mu \leq \liminf_{r \to +\infty} \int_X |f_{n_r} - f_m|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p, \quad m > n_\varepsilon,$$

da cui $f = (f - f_m) + f_m \in L^p$ e $\|f - f_m\|_p \to 0$.

Lasciamo al lettore (esercizio 2.6) la dimostrazione del caso $p = \infty$. □

Osserviamo esplicitamente che dalla dimostrazione si vede che da una successione di Cauchy (e quindi in particolare da una successione convergente) in L^p si può estrarre una sottosuccessione convergente q.o.

In base all'esercizio 2.7, dal teorema di Riesz-Fisher si ottiene un'altra dimostrazione, rispetto a quella data nell'esempio 1.36(c), della completezza di $\ell^p(I)$. Ulteriori semplici relazioni tra spazi ℓ^p e L^p con diversi valori di p sono date dall'esercizio 2.8.

L'ultimo risultato che vogliamo illustrare, e che ci sarà utile in seguito, afferma sostanzialmente che, se μ è una misura di Borel regolare (finita) su uno spazio metrico, le funzioni di $L^p(X, \mu)$, che a priori sembrerebbero essere molto irregolari, non lo sono poi tanto, in quanto si possono approssimare con funzioni continue. Questo non è sorprendente, se si pensa al ruolo che svolgono gli insiemi aperti nelle nozioni di continuità e di misura regolare.

Teorema 2.29. *Siano (X, d) uno spazio metrico e μ una misura di Borel regolare su di esso finita (cioè tale che $\mu(X) < +\infty$). Allora lo spazio $C_b(X)$ delle funzioni continue limitate su X è denso (nella topologia indotta da $\|\cdot\|_p$) in $L^p(X, \mu)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che per ogni $f \in L^p(X, \mu)$ esiste una successione $(g_n) \subset C_b(X)$ tale che $\|g_n - f\|_p \to 0$. Lo faremo in diversi passi, prendendo f via via più generali.

Per cominciare, sia $f = \chi_C$ la funzione caratterstica di un insieme chiuso $C \subset X$, e sia

$$g_n(x) := \frac{1}{1 + n\mathrm{dist}(x, C)}, \qquad x \in X,\ n \in \mathbb{N}.$$

È chiaro che $0 \leq g_n \leq 1$ e $g_n(x) = 1$ per ogni $x \in C$, e, in base all'esercizio 2.9, si ha $g_n \in C_b(X)$, $g_n(x) \to 0$ per ogni $x \notin C$. Cioè $g_n \to \chi_C$ puntualmente in X, ed essendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $|g_n - \chi_C|^p \leq 2^p \in L^1(X, \mu)$ (se la misura è finita le funzioni costanti sono integrabili), per il teorema di convergenza dominata 2.22 si avrà $\|g_n - \chi_C\|_p \to 0$.

Sia poi $f = \chi_A$ con $A \in \mathfrak{B}(X)$. Dato $\varepsilon > 0$ esisterà, per la regolarità di μ, un chiuso $C \subset A$ tale che $\mu(A \setminus C) < (\varepsilon/2)^p$, e d'altra parte, per quanto appena visto, $\|g_n - \chi_C\|_p < \varepsilon/2$ per n sufficientemente grande. Ne segue

$$\begin{aligned}
\|g_n - \chi_A\|_p &\leq \|g_n - \chi_C\|_p + \|\chi_C - \chi_A\|_p \\
&= \|g_n - \chi_C\|_p + \left(\int_X |\chi_C - \chi_A|^p \right)^{1/p} \\
&= \|g_n - \chi_C\|_p + \left(\int_X \chi_{A \setminus C} \right)^{1/p} \\
&= \|g_n - \chi_C\|_p + \mu(A \setminus C)^{1/p} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

e dunque $\|g_n - \chi_A\|_p \to 0$.

Da questo si ottiene la tesi anche per ogni s funzione misurabile semplice: ogni tale funzione è combinanzione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi boreliani, e basta allora definire g_n come la combinanzione lineare, con gli stessi coefficienti, delle rispettive funzioni continue approssimanti definite sopra.

Presa poi $f \in L^p$ non negativa, esisterà, per la dimostrazione del teorema 2.16, una successione (s_n) di funzioni misurabili semplici non negative che converge puntualmente e monotonamente a f. Pertanto $|s_n - f|^p = (f - s_n)^p \leq f^p \in L^1$ e quindi, ancora per il teorema di convergenza dominata, si avrà $\|s_n - f\|_p \to 0$. D'altra parte, per quanto visto sopra, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esisterà $g_n \in C_b(X)$ tale che $\|g_n - s_n\|_p < 1/n$, e dunque

$$\|g_n - f\|_p \leq \|g_n - s_n\|_p + \|s_n - f\|_p < \frac{1}{n} + \|s_n - f\|_p \to 0.$$

Infine il caso generale di $f \in L^p$ si riconduce al precedente scomponendo $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ in parti positive e negative come nella seconda parte della dimostrazione del teorema 2.16. $\square$

In particolare, dunque, se $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto, lo spazio $C(K)$ delle funzioni continue (complesse) su K è denso in $L^p(K)$ (con la misura di Lebesgue) per ogni $p \in [1, +\infty)$. Non è difficile dimostrare che invece non lo è per $p = \infty$ (vedere l'esercizio 2.10).

Esercizi

2.1 Sia X uno spazio topologico. La famiglia di sottoinsiemi di X

$$\mathscr{B}(X) := \bigcap \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \subset \mathscr{P}(X)\, \sigma\text{-algebra t.c. } A \in \mathfrak{M}\ \forall A \subset X \text{ aperto}\}$$

è la più piccola σ-algebra su X che contiene tutti gli insiemi aperti.

2.2 Sia $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una numerazione dei razionali in $(0,1)$ e, dato $\varepsilon > 0$, si considerino gli insiemi

$$A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \cap (0,1)$$

e $K = [0,1] \setminus A$. Dimostrare:

(a) A, K sono Lebesgue-misurabili e $m(A) \leq \varepsilon$, $m(K) \geq 1 - \varepsilon$;

(b) A è denso in $(0,1)$ e K ha interno vuoto;

*(c) K non è misurabile secondo Peano-Jordan (sugg.: si ha $m_e(K) \geq 1 - \varepsilon$: se così non fosse, si potrebbe trovare un plurintervallo aperto $E \subset \mathbb{R}$ tale che $K \subset E$ e $m(E) < 1 - \varepsilon$, ma allora $[0,1] \setminus E \subset A$...)

2.3 Dimostrare le proprietà (i)-(v) del teorema 2.14.

2.4 Dimostrare le proprietà (iv)-(vi) della proposizione 2.19.

2.5 Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Verificare:

(a) se $f : X \to \mathbb{C}$ è misurabile, la funzione $t \mapsto \mu(\{|f| > t\})$ è continua a destra;

(b) se f è essenzialmente limitata, $\|f\|_\infty = \min\{t \geq 0 \,:\, \mu(\{|f| > t\}) = 0\}$;

(c) $\|\cdot\|_\infty$ è una norma su $L^\infty(X, \mu)$;

*2.6 Mostrare che $(L^\infty(X, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach. (Sugg.: data $(f_n) \subset L^\infty$ di Cauchy, sia E l'unione, su $k, m, n \in \mathbb{N}$, degli insiemi $A_k := \{|f_k| > \|f_k\|_\infty\}$, $B_{m,n} := \{|f_m - f_n| > \|f_m - f_n\|_\infty\}$; allora $\mu(E) = 0$ e $\ell^\infty(E^c)$ è completo.)

2.7 Sia I un insieme. Dimostrare che $\int_I f d\mu_\sharp = \sum_{\alpha \in I} f(\alpha)$ per ogni f per cui ha senso, e che quindi $L^p(I, \mu_\sharp) = \ell^p(I)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$ ($\mu_\sharp$ è la misura che conta in I). Che succede se al posto di $\mu_\sharp$ si usa δ_{x_0}?

2.8 Mostrare che $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N})$ e che, se $\mu(X) < \infty$, $L^2(X, \mu) \subset L^1(X, \mu)$. Mostrare che, usando la misura di Lebesgue, $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$.

2.9 Dato uno spazio metrico (X, d), e posto $\mathrm{dist}(x, B) := \inf_{y \in B} d(x, y)$, $x \in X$, $B \subset X$, verificare:

(a) $x \in X \mapsto \mathrm{dist}(x, B)$ è continua;

(b) se C è chiuso e $x \notin C$, allora $\mathrm{dist}(x, C) > 0$.

2.10 Siano (X, d) uno spazio metrico, e μ una misura di Borel su X. Mostrare che $C_b(X)$ è chiuso in $L^\infty(X, \mu)$ (sugg.: ricordare la dimostrazione di completezza di L^∞). Dare esempi in cui $C_b(X) = L^\infty(X, \mu)$ e in cui $C_b(X) \subsetneq L^\infty(X, \mu)$.

Capitolo 3

Teoria elementare degli spazi di Hilbert

Gli spazi di Hilbert (infinito-dimensionali) che, come noto, svolgono un ruolo fondamentale in Meccanica Quantistica, sono la generalizzazione più diretta degli spazi euclidei finito-dimensionali (come $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$), e ne ereditano la maggior parte delle proprietà geometriche, come ad esempio il fatto che si può sempre trovare un complementare di un sottospazio (chiuso), cosa falsa in uno spazio di Banach generico. Questo fa sì che la geometria degli spazi di Hilbert sia tutto sommato "banale", mentre ciò che è veramente interessante e ricco di risultati è lo studio degli operatori definiti su di essi, che noi inizieremo, con gli aspetti più elementari, in questo capitolo e proseguiremo, in forma astratta e più generale, nei successivi due.

3.1 Definizione e proprietà elementari

Definizione 3.1. Sia H uno spazio vettoriale complesso. Una *forma sesquilineare* su H è un'applicazione $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ tale che:

(i) per ogni $x \in H$, l'applicazione $y \in H \mapsto \langle x, y\rangle$ è lineare;

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ per ogni $x, y \in H$.

Una forma sesquilineare è detta *semidefinita positiva* se vale inoltre

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ per ogni $x \in H$,

mentre è detta un *prodotto scalare* se

(iii') $\langle x, x\rangle > 0$ per ogni $x \in H$, $x \neq 0$.

In quest'ultimo caso, la coppia $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ è detta uno *spazio prehilbertiano*.

Osserviamo esplicitamente che dalla (i) e (ii) segue che $x \mapsto \langle x, y\rangle$ è *antilineare* per ogni $y \in H$ (cioè $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \bar{\alpha}_1\langle x_1, y\rangle + \bar{\alpha}_2\langle x_2, y\rangle$ per ogni $x_1, x_2, y \in H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$). Inoltre chiaramente $\langle 0, 0\rangle = 0$, e quindi un prodotto scalare è una forma sesquilineare semidefinita positiva per cui $x = 0$ è l'unico vettore tale che $\langle x, x\rangle = 0$.

Teorema 3.2 (Disuguagliazna di Cauchy-Schwarz). *Data una forma sesquilineare semidefinita positiva $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su H, si ha*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}, \qquad x,y\in H. \tag{3.1}$$

Inoltre, se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è un prodotto scalare, l'uguaglianza vale se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Se $\langle x,y\rangle = 0$ la tesi è banalmente verificata. Sia allora $\langle x,y\rangle \neq 0$. Dato $\lambda\in\mathbb{R}$, si avrà

$$\begin{aligned} 0 &\leq \big\langle \lambda y + \langle x,y\rangle x, \lambda y + \langle x,y\rangle x\big\rangle \\ &= \lambda^2\langle y,y\rangle + \lambda\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle + \lambda\overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle\langle x,x\rangle \\ &= \lambda^2\langle y,y\rangle + 2\lambda|\langle x,y\rangle|^2 + |\langle x,y\rangle|^2\langle x,x\rangle. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Osservando che l'ultimo membro è un polinomio quadratico in λ, si conclude che affinché esso sia non negativo deve aversi

$$|\langle x,y\rangle|^4 - \langle y,y\rangle|\langle x,y\rangle|^2\langle x,x\rangle \leq 0,$$

che, dividendo per $\langle x,y\rangle\neq 0$, fornisce la (3.1).

È poi chiaro che se x, y sono linearmente dipendenti si ha l'uguaglianza nella (3.1). Viceversa, se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è un prodotto scalare e vale l'uguaglianza nella (3.1), dalla (3.2) si ha ancora, per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \big\langle \lambda y + \langle x,y\rangle x, \lambda y + \langle x,y\rangle x\big\rangle &= \lambda^2\langle y,y\rangle + 2\lambda\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle + \langle y,y\rangle\langle x,x\rangle^2 \\ &= \Big(\lambda\sqrt{\langle y,y\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}\langle x,x\rangle\Big)^2 \end{aligned}$$

e prendendo allora $\lambda = -\langle x,x\rangle$ si ottiene $\big\langle \lambda y + \langle x,y\rangle x, \lambda y + \langle x,y\rangle x\big\rangle = 0$ che, per la (iii') della definizione 3.1, implica $\lambda y + \langle x,y\rangle x = 0$, cioè x, y linearmente dipendenti. □

Corollario 3.3. *Sia $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio prehilbertiano. Allora*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}, \qquad x\in H,$$

è una norma su H, detta la norma indotta dal prodotto scalare.

Dimostrazione. È chiaro dalla definizione 3.1 che $\|x\| = 0$ solo se $x = 0$ e che $\|\cdot\|$ è omogenea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha poi, per ogni $x,y\in H$,

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = \langle x+y,x+y\rangle &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2, \end{aligned}$$

e quindi la disuguaglianza triangolare. □

Dunque ogni spazio prehilbertiano è, in modo naturale, uno spazio normato. Questo ci mette nella posizione di poter dare la definizione di spazio di Hilbert.

Definizione 3.4. Uno *spazio di Hilbert* è uno spazio prehilbertiano che sia completo nella norma indotta dal prodotto scalare.

Prima di passare agli esempi, scriviamo un paio di identità che ci saranno molto utili in seguito. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ una forma sesquilineare su H, e $R_4 := \{\pm 1, \pm i\}$ l'insieme delle radici quarte dell'unità (in $\mathbb{C}$). Usando anche in questo caso, per brevità, la notazione $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ (che in generale non sarà nemmeno un numero non negativo, se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ non è semidefinita positiva), dato $\omega \in R_4$ si ha

$$\|x + \omega y\|^2 = \|x\|^2 + \omega \langle x, y \rangle + \bar{\omega} \langle y, x \rangle + \|y\|^2, \qquad x, y \in H, \tag{3.3}$$

e moltiplicando questa equazione per $\bar{\omega}$ e sommando al variare di $\omega \in R_4$ si ottiene, notando che $\sum_{\omega \in R_4} \bar{\omega} = 0 = \sum_{\omega \in R_4} \bar{\omega}^2$, l'*identità di polarizzazione*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\omega \in R_4} \bar{\omega} \|x + \omega y\|^2, \qquad x, y \in H \tag{3.4}$$

che, nel caso particolare di uno spazio prehilbertiano, permette di ricostruire il prodotto scalare dalla conoscenza della norma. Similmente, sommando tra loro le (3.3) per $\omega = \pm 1$, si ottiene l'*identità del parallelogramma*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \qquad x, y \in H, \tag{3.5}$$

il cui nome è dovuto al fatto che lega le lunghezze dei lati del parallelogramma definito dai vettori x e y con le lunghezze delle sue diagonali ($x + y$ e $x - y$). Si noti che la (3.5) è un'identità soddisfatta dalla norma definita dal prodotto scalare. Si può dimostrare che in effetti essa caratterizza le norme che provengono da un prodotto scalare.

Esempi 3.5. (a) L'esempio più semplice di spazio di Hilbert è $\mathbb{C}^n$ con il prodotto scalare standard definito da $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k$, a cui è associata la norma euclidea $\|x\|_2 = (\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{1/2}$, in cui, com'è noto, $\mathbb{C}^n$ è completo.

(b) Sullo spazio $\ell^2(I)$, I insieme arbitrario, dell'esempio 1.36(c) si può definire un prodotto scalare ponendo, in analogia all'esempio precedente:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{\alpha \in I} \bar{x}_\alpha y_\alpha, \qquad x = (x_\alpha), y = (y_\alpha) \in \ell^2(I).$$

Per convincersi che questo è effettivamente ben definito, cioè che esiste il limite che definisce il secondo membro, osserviamo che per ogni sottoinsieme finito $F \subset I$, ponendo

$$\langle x, y \rangle_F := \sum_{\alpha \in F} \bar{x}_\alpha y_\alpha, \qquad x, y \in \ell^2(I),$$

si definisce una forma sesquilineare semidefinita positiva $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ su $\ell^2(I)$, per la quale vale dunque l'identità di polarizzazione:

$$\langle x, y \rangle_F = \frac{1}{4} \sum_{\omega \in R_4} \bar{\omega} \sum_{\alpha \in F} |x_\alpha + \omega y_\alpha|^2.$$

Il secondo membro di quest'ultima equazione converge, come net su $\mathscr{P}_0(I)$, a $\frac{1}{4}\sum_{\omega\in R_4}\bar{\omega}\|x+\omega y\|_2^2$ per definizione della norma su $\ell^2(I)$. Dunque esiste $\langle x,y\rangle = \lim_{F\in\mathscr{P}_0(I)}\langle x,y\rangle_F$ per ogni $x,y\in\ell^2(I)$, e si verifica poi facilmente, ancora usando $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ e passando al limite, che è una forma sesquilineare definita positiva, ed è poi un prodotto scalare in quanto chiaramente $\langle x,x\rangle = \|x\|_2^2 > 0$ per ogni $x\neq 0$. Poiché allora, come visto nell'esempio 1.36(c), $(\ell^2(I),\|\cdot\|_2)$ è completo, $(\ell^2(I),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ è uno spazio di Hilbert, che, nel caso $I=\mathbb{N}$, rappresenta lo spazio dei vettori di stato di un sistema quantistico nella meccanica delle matrici di Heisenberg, Bohr e Jordan.

(c) Dato uno spazio di misura $(X,\mathfrak{M},\mu)$, si definisce su $L^2(X,\mu)$ un prodotto scalare ponendo

$$\langle\psi,\varphi\rangle := \int_X \bar{\psi}\varphi\,d\mu, \qquad \psi,\varphi\in L^2(X,\mu).$$

Che questo sia ben definito (cioè che $\bar{\psi}\varphi\in L^1$) è stato visto nella dimostrazione della proposizione 2.26, ed è poi chiaro che è un prodotto scalare, la cui norma indotta è proprio $\|\psi\|_2 = (\int_X|\psi|^2)^{1/2}$. Pertanto dal teorema di Riesz-Fisher 2.28 si ottiene che $L^2(X,\mu)$ è uno spazio di Hilbert. Nel caso particolare $X=\mathbb{R}^3$ (con la misura di Lebesgue), come già osservato all'inizio del primo capitolo, questo è lo spazio dei vettori di stato della meccanica ondulatoria di Schrödinger. Uno dei maggiori problemi agli albori della Meccanica Quantistica, noto come *problema delle rappresentazioni*, fu proprio quello di capire se le descrizioni di Heisenberg e di Schrödinger fossero o meno equivalenti. Una parte della soluzione di von Neumann fu proprio la dimostrazione che i due spazi di Hilbert relativi, $\ell^2(\mathbb{N})$ e $L^2(\mathbb{R}^3)$, sono in realtà "lo stesso". Noi lo vedremo in questo capitolo, e studieremo il problema delle rappresentazioni, in linguaggio moderno, nel capitolo **??**.

Altri esempi di spazi di Hilbert, costruiti a partire da spazi di Hilbert dati, si trovano negli esercizi 3.1, 3.2, dove è introdotta l'importante nozione di *somma diretta* $\bigoplus_{\alpha\in I}H_\alpha$ di una famiglia arbitraria $(H_\alpha)_{\alpha\in I}$ di spazi di Hilbert. In particolare si vede che $\ell^2(I)=\bigoplus_{\alpha\in I}H_\alpha$ con $H_\alpha=\mathbb{C}$ per ogni $\alpha\in I$.

Si è visto, col teorema 1.39, che uno spazio normato può sempre essere pensato come un sottospazio denso di uno spazio di Banach, il suo completamento. Nel caso che la norma provenga da un prodotto scalare, il prossimo risultato che vogliamo dimostrare garantisce che anche quella del completamento gode della stessa proprietà, e che quindi il completamento è uno spazio di Hilbert.

Prima di formularlo in dettaglio, osserviamo che se H,K sono spazi prehilbertiani, un'applicazione lineare $j:H\to K$ è isometrica se e solo se conserva i prodotti scalari, cioè $\langle j(x),j(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ per ogni $x,y\in H$. Infatti se j è isometrica si ha, dall'identità di polarizzazione,

$$\langle j(x),j(y)\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\omega\in R_4}\bar{\omega}\|j(x+\omega y)\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{\omega\in R_4}\bar{\omega}\|x+\omega y\|^2 = \langle x,y\rangle,$$

e viceversa se j conserva i prodotti scalari

$$\|j(x)\|^2 = \langle j(x),j(x)\rangle = \langle x,x\rangle = \|x\|^2.$$

È inoltre facile vedere che un'applicazione che conserva i prodotti scalari è automaticamente lineare (esercizio 3.3).

Teorema 3.6. *Dato uno spazio prehilbertiano* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$*, esistono uno spazio di Hilbert* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$*, detto il* completamento di X*, e un'isometria* $j : X \to H$ *tali che* $\overline{j(X)} = H$*. Il completamento di* X *è unico nello stesso senso del teorema 1.39.*

Dimostrazione. Sia H il completamento di X pensato come spazio normato, fornito dalla seconda parte del teorema 1.39, e $j : X \to H$ la relativa isometria tale che $\overline{j(X)} = H$. Dati allora $x, y \in H$ esisteranno successioni $(x_n), (y_n) \subset X$ tali che $j(x_n) \to x$, $j(y_n) \to y$. Sarà allora naturale definire un prodotto scalare su H tramite:

$$\langle x, y\rangle_H := \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle_X.$$

Affinché questo sia ben definito, è necessario che il limite esista e non dipenda dalle successioni (x_n), (y_n) scelte. Per quanto riguarda l'esistenza, si ha, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle_X - \langle x_m, y_m\rangle_X| &\le |\langle x_n - x_m, y_n\rangle_X| + |\langle x_m, y_n - y_m\rangle_X| \\ &\le \|x_n - x_m\|_X \|y_n\|_X + \|x_m\|_X \|y_n - y_m\|_X \\ &= \|j(x_n) - j(x_m)\|_H \|j(y_n)\|_H + \|j(x_m)\|_H \|j(y_n) - j(y_m)\|_H,\end{aligned}$$

avendo usato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz nel secondo passaggio e l'isometria di j nel terzo. Poiché allora le successioni convergenti $(j(x_n)), (j(y_n))$ sono in particolare limitate e di Cauchy, ne segue che $(\langle x_n, y_n\rangle_X)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ è di Cauchy, e quindi convergente. Per quanto riguarda l'indipendenza dalle successioni scelte, siano $(x'_n), (y'_n) \subset X$ altre due successioni tali che $j(x'_n) \to x$, $j(y'_n) \to y$. Si avrà allora, con passaggi analoghi a quelli appena fatti,

$$|\langle x_n, y_n\rangle_X - \langle x'_n, y'_n\rangle_X| \le \|j(x_n) - j(x'_n)\|_H \|j(y_n)\|_H + \|j(x'_n)\|_H \|j(y_n) - j(y'_n)\|_H.$$

Poiché allora le successioni convergenti $(j(x'_n)), (j(y_n))$ sono limitate, e $\|j(x_n) - j(x'_n)\|_H \to 0$, $\|j(y_n) - j(y'_n)\|_H \to 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty}\langle x_n, y_n\rangle_X = \lim_{n\to+\infty}\langle x'_n, y'_n\rangle_X$, e dunque $\langle x, y\rangle_H$ è ben definito. È poi immediato verificare, usando il fatto che $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ è un prodotto scalare e passando al limite, che $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ così definita è una forma sesquilineare semidefinita positiva. Che sia poi anche un prodotto scalare deriva dal fatto che la norma che esso induce è proprio la norma $\|\cdot\|_H$ del completamento:

$$\langle x, x\rangle_H = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, x_n\rangle_X = \lim_{n\to+\infty} \|x_n\|_X^2 = \lim_{n\to+\infty} \|j(x_n)\|_H^2 = \|x\|_H^2.$$

Infine la dimostrazione dell'unicità del completamento è analoga a quella del caso degli spazi metrici e normati. □

Esercizi

3.1 Siano $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(K, \langle\cdot,\cdot\rangle_K)$ spazi di Hilbert. Sullo spazio vettoriale somma diretta

$$H \oplus K := \{(x, y) : x \in H, y \in K\},$$

i cui elementi saranno denotati con $x \oplus y := (x, y)$, si definisca

$$\langle x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2\rangle := \langle x_1, x_2\rangle_H + \langle y_1, y_2\rangle_K, \qquad x_i \oplus y_i \in H \oplus K.$$

Verificare che $(H \oplus K, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ è uno spazio di Hilbert, detto *somma diretta (hilbertiana)* di H e K.

*3.2 Siano $(H_\alpha, \langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha)$, $\alpha \in I$, spazi di Hilbert, e si definisca

$$\bigoplus_{\alpha\in I} H_\alpha := \Big\{(x_\alpha)_{\alpha\in I} \,:\, x_\alpha \in H_\alpha \,\forall\alpha \in I,\, \sum_{\alpha\in I} \|x_\alpha\|_\alpha^2 < \infty\Big\}.$$

Verificare:

(a) $\bigoplus_{\alpha\in I} H_\alpha$ è uno spazio vettoriale con le operazioni definite da

$$(x_\alpha)_{\alpha\in I} + (y_\alpha)_{\alpha\in I} := (x_\alpha + y_\alpha)_{\alpha\in I}, \qquad \lambda(x_\alpha)_{\alpha\in I} := (\lambda x_\alpha)_{\alpha\in I};$$

(b) $\bigoplus_{\alpha\in I} H_\alpha$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare definito da

$$\big\langle (x_\alpha)_{\alpha\in I}, (y_\alpha)_{\alpha\in I}\big\rangle := \sum_{\alpha\in I} \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle_\alpha.$$

Tale spazio è detto la *somma diretta* della famiglia $(H_\alpha)_{\alpha\in I}$.

3.3 Siano X, Y spazi prehilbertiani, e $j : X \to Y$ un'applicazione che preserva i prodotti scalari. Mostrare che j è lineare (sugg.: calcolare $\|j(x+y) - j(x) - j(y)\|^2$, $\|j(\alpha x) - \alpha j(x)\|^2$).

3.4 Mostrare che $\ell^2(I)$ è il completamento dello spazio prehilbertiano

$$c_c(I) := \{x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \,:\, x_\alpha \in \mathbb{C},\, x_\alpha \neq 0 \text{ solo per un insieme finito di } \alpha \in I\}$$

con il prodotto scalare $\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in I} \bar{x}_\alpha y_\alpha$.

Bibliografia

[Arv] W. Arveson, *A Short Course on Spectral Theory*, Springer, 2002.

[Con] J. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, 1985.

[Dop] S. Doplicher, appunti del corso *Meccanica Quantistica*, Università di Roma La Sapienza, A.A. 1995-96.

[DeM] G. De Marco, *Analisi Due/1*, Zanichelli, 1992.

[KF] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elementi di Teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale*, Mir, 1980.

[Ped] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, Springer, 1989.

[RS1] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics* vol. I, Springer, 1972.

[RS2] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics* vol. II, Springer, 1975.

[Rob] J. E. Roberts, note del corso *Fondamenti di Analisi Matematica*, Università di Roma Tor Vergata, A.A. 2011-12.

[Rud1] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[Rud2] W. Rudin, *Analisi Reale e Complessa*, Boringhieri, 1974.

[Str] F. Strocchi, *An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics*, World Scientific, 2005.