Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 7/6/13

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono particolarmente impegnativi.

1. Sia $A : D(A) \to H$ autoaggiunto e $P : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to B(H)$ la sua misura spettrale. Si mostri:
   (a) $x \in \operatorname{ran} P([-k, k])$ è analitico per A (sugg.: $\|A^n x\|^2 = \int_{[-k,k]} \lambda^{2n} d\mu_x(\lambda)$);
   (b) $D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{ran} P([-k, k])$ è denso in H;
   (c) se $x \in D$, $e^{itA}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} A^n x$.

2. Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura, e $(f_n) \subset L^1(X, \mu)$. Verificare che se $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_1 < +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge per q.o. $x \in X$, definisce una funzione in $L^1(X, \mu)$ e

$$\int_X \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

3. Sia $A : D(A) \to H$ simmetrico con un'unica estensione autoaggiunta. Verificare che A è essenzialmente autoaggiunto.

4. Siano $(\psi_n) \subset L^2(\mathbb{R})$ le funzioni di Hermite, $D := \langle \psi_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ e $a, a^\dagger : D \to L^2(\mathbb{R})$ definiti da

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip), \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip).$$

   Si mostri:
   (a) $a^\dagger \subset a^*$;
   *(b) $a^* = \overline{a^\dagger} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)|_{D(q)\cap D(p)}}$, $\overline{a} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)|_{D(q)\cap D(p)}}$