Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 4/6/13

1. Sia $H : D(H) \subset K \to K$ un operatore autoaggiunto su K di Hilbert, e sia
$$D_0 := \Big\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{itH} \psi \, : \, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \, \psi \in K \Big\}.$$
Dato $A \in B(K)$ tale che $AD_0 \subset D_0$, e posto $A_t := e^{itH} A e^{-itH}$, $t \in \mathbb{R}$, mostrare che vale l'equazione del moto di Heisenberg:
$$\frac{d}{dt} A_t \psi = i[H, A_t]\psi, \qquad t \in \mathbb{R}, \psi \in D_0.$$

2. Siano $A : D(A) \subset H \to H$, $Z : H \to H$ unitario e $B = ZAZ^*$, $D(B) = ZD(A)$. Si verifichi:
   (a) A è autoaggiunto se e solo se B è autoaggiunto, e in tal caso $e^{itB} = Ze^{itA}Z^*$ per ogni $t \in \mathbb{R}$;
   (b) $A|_D$ è essenzialmente autoaggiunto (con $D \subset D(A)$ sottospazio denso) se e solo se $B|_{ZD}$ è essenzialmente autoaggiunto, e in tal caso $e^{it\overline{B|_{ZD}}} = Ze^{it\overline{A|_D}}Z^*$.