# Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
# a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 27/5/13

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono particolarmente impegnativi.

1. Si mostri che un operatore lineare $T : D(T) \to H$ è chiudibile se e solo se data una successione $(x_n) \subset D(T)$ tale che $x_n \to 0$ e $Tx_n \to y$ per qualche $y \in H$, ne segue che $y = 0$.

2. Sia $T : D(T) \to H$ chiudibile. Verificare:

   (a) esiste una minima estensione chiusa $\bar{T}$ di $T$ (la *chiusura* di $T$), cioè esiste $\bar{T} \supset T$ estensione chiusa con la proprietà che se $S \supset T$ è un'estensione chiusa, si ha $\bar{T} \subset S$;

   (b) $\bar{T}$ è caratterizzato, tra le estensioni chiuse di $T$, dal fatto che $\Gamma(\bar{T}) = \overline{\Gamma(T)}$.

3. Siano $S \subset T$ densamente definiti. Si verifichi che allora $T^* \subset S^*$.

4. Sia $A : D(A) \to H$ simmetrico. Si mostri che sono equivalenti:

   (a) $A$ è essenzialmente autoaggiunto;

   (b) $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$;

   (c) $\operatorname{ran}(A \pm i)$ sono densi in $H$.

   (Sugg.: si ha $\operatorname{ran}(\bar{A} \pm i) = \overline{\operatorname{ran}(A \pm i)}$.)

5. Sia $p$ l'operatore su $H = L^2([0,1])$ definito da

$$D(p) = \{\psi \in AC([0,1]) \,:\, \psi' \in H,\, \psi(0) = 0 = \psi(1)\},$$
$$p\psi = -i\psi'.$$

   Mostrare:

   (a) le estensioni autoaggiunte di $p$ sono gli operatori $p_\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, definiti da

$$D(p_\theta) = \{\psi \in AC([0,1]) \,:\, \psi' \in H,\, \psi(0) = e^{i\theta}\psi(1)\},$$
$$p_\theta\psi = -i\psi';$$

   *(b) $\sigma(p_\theta) = \sigma_p(p_\theta) = 2\pi\mathbb{Z} + \theta$.