Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 24/5/13

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono particolarmente impegnativi.

1. Sia π una rappresentazione regolare dell'algebra di Weyl $\mathscr{W}$. Verificare che per ogni $x, y \in H_\pi$ la funzione $z \in \mathbb{C} \mapsto \langle x, \pi(W(z))y \rangle$ è continua.

2. Mostrare che lo spazio $C_c(\mathbb{R})$ delle funzioni continue a supporto compatto su $\mathbb{R}$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.

*3. In unità generiche le relazioni di Weyl diventano

$$W(z_1)W(z_2) = e^{-\frac{i\hbar}{2}\sigma(z_1,z_2)}W(z_1 + z_2), \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Data allora una rappresentazione regolare π dell'algebra di Weyl, e indicata con $\pi(W(f))$ la quantizzazione di Wigner-Weyl della funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)\hat{}$, si mostri:

(a) $\pi(W(f))\pi(W(g)) = \pi(W(f \times_\hbar g))$ dove

$$(f \times_\hbar g)\hat{}(z) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\zeta\, \hat{f}(\zeta)\hat{g}(z - \zeta)e^{-\frac{i\hbar}{2}\sigma(z,\zeta)};$$

(b) per $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ (funzioni C^∞ a supporto compatto) si ha

$$\lim_{\hbar \to 0} \Big\| [\pi(W(f)), \pi(W(g))] - i\hbar\pi(W(\{f, g\})) \Big\| = 0,$$

dove $\{f, g\} = \partial_q f \partial_p g - \partial_p f \partial_q g$ è la parentesi di Poisson di f, g.