Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 21/5/13

1. Sia (U, V) una realizzazione delle relazioni di Weyl (1-dimensionali). Verificare che posto $W(\alpha + i\beta) := e^{i\alpha\beta/2}U(\alpha)V(\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si hanno le *relazioni di Weyl in forma complessa*

$$W(z_1)W(z_2) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(z_1,z_2)}W(z_1 + z_2), \quad W(z)^* = W(-z), \qquad z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

dove $\sigma(z_1, z_2) = \operatorname{Im}\langle z_1, z_2\rangle$ (prodotto scalare standard su $\mathbb{C}$), e che, viceversa, dati $W(z)$, $z \in \mathbb{C}$, soddisfacenti queste relazioni, si ottiene una realizzazione delle relazioni di Weyl ponendo $U(\alpha) := W(\alpha)$, $V(\beta) := W(i\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. Sia H uno spazio di Hilbert. Mostrare che $\sigma : H \times H \to \mathbb{R}$ definita da $\sigma(x, y) := \operatorname{Im}\langle x, y\rangle$ è una forma simplettica non degenere (cioè tale che $\sigma(x, y) = 0$ per ogni $y \in H$ se e solo se $x = 0$) su H.

3. Verificare che, munendo lo spazio $\mathscr{W}_0$ delle funzioni a supporto finito da $\mathbb{C}$ in se stesso del prodotto e dello $*$ definiti a lezione, si ottiene effettivamente $(fg)^* = g^*f^*$ per ogni $f, g \in \mathscr{W}_0$.

4. Sia $\mathscr{A}$ una *-algebra, normata con una norma che soddisfa l'identità C*. Verificare che il completamento di $\mathscr{A}$ rispetto a tale norma è una C*-algebra.

5. Sia $\mathscr{A}$ C*-algebra con unità. Si mostri che, per ogni $a \in \mathscr{A}$,

$$\|a\| = \sup\{\|\pi(a)\| \,:\, \pi \text{ rappresentazione ciclica di } \mathscr{A}\}.$$

6. Sia $\mathscr{W}$ il completamento di $\mathscr{W}_0$ definito a lezione e sia $\tilde{\mathscr{W}}$ una C*-algebra generata da una realizzazione $\{\tilde{W}(z) : z \in \mathbb{C}\}$ delle relazioni di Weyl (in forma complessa). Si mostri:

   (a) $\Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{W}(z_i)\Big\| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{z_i}\Big\|$ (sugg.: se $\tilde{\pi}$ è una rappresentazione ciclica di $\tilde{\mathscr{W}}$, allora $\pi(\sum_{i=1}^n \alpha_i\delta_{z_i}) := \tilde{\pi}(\sum_{i=1}^n \alpha_i\tilde{W}(z_i))$ è una rappresentazione ciclica di $\mathscr{W}_0$);

   (b) esiste un unico *-omomorfismo $\phi : \mathscr{W} \to \tilde{\mathscr{W}}$ tale che $\phi(\sum_{i=1}^n \alpha_i\delta_{z_i}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\tilde{W}(z_i)$;

   (c) $\phi : \mathscr{W} \to \tilde{\mathscr{W}}$ è uno *-isomorfismo isometrico.