# Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
# a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 17/5/13

1. Dato un insieme $\mathscr{T} \subset B(H)$ tale che $\mathscr{T}^* = \mathscr{T}$, il *commutante* di $\mathscr{T}$ è

$$\mathscr{T}' := \{S \in B(H) \,:\, ST = TS, \forall T \in \mathscr{T}\}.$$

   Si verifichi:

   (a) $\mathscr{T}'$ è una C*-algebra con unità ed è *fortemente chiusa*, cioè se $(T_\alpha) \subset \mathscr{T}'$ è un net per cui esiste $T \in B(H)$ tale che $T_\alpha x \to Tx$ per ogni $x \in H$, allora $T \in \mathscr{T}'$;

   (b) $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2 \implies \mathscr{T}_2' \subset \mathscr{T}_1'$;

   (c) $\mathscr{T}$ è commutativo (cioè $T_1 T_2 = T_2 T_1$ per ogni $T_1, T_2 \in \mathscr{T}$) se e solo se $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$;

   (d) $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}''$;

   (e) $\mathscr{T}'' = \mathscr{T}'''' = \ldots$, $\mathscr{T}' = \mathscr{T}''' = \ldots$

2. Siano $\omega \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$, $\hat{\pi}$ la rappresentazione universale di $\mathscr{A}$ e $P_\omega$ il proiettore sul sottospazio $\overline{\hat{\pi}(\mathscr{A})'\hat{\xi}_\omega} \subset \hat{H}$. Mostrare:

   (a) $P_\omega \in \hat{\pi}(\mathscr{A})''$ e $P_\omega \hat{\xi}_\omega = \hat{\xi}_\omega$;

   (b) se $P \in \hat{\pi}(\mathscr{A})''$ è un proiettore tale che $P\hat{\xi}_\omega = \hat{\xi}_\omega$, allora $P \geq P_\omega$.

3. Sia $\pi : \mathscr{A} \to B(H)$ una rappresentazione e sia $K \subset H$ sottospazio chiuso invariante per $\pi$. Si mostri che $\pi$ è unitariamente equivalente a $\pi_1 \oplus \pi_2$, dove $\pi_1 := \pi(\cdot) \restriction K$, $\pi_2 := \pi(\cdot) \restriction K^\perp$.