

# Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 14/5/13

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (\*) sono particolarmente impegnativi.

1. Siano  $\mathcal{A}$  una  $C^*$ -algebra con unità e  $\omega, \omega' \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ . Si verifichi che  $\omega'$  è dominato da  $\omega$  se e solo se esiste  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$  tale che  $\omega$  è combinazione convessa di  $\omega'$  e  $\varphi$ .
2. Sia  $\mathcal{A}$   $C^*$ -algebra commutativa con unità. Mostrare che  $\Omega(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathcal{A})$  (sugg.:  $\omega \in \Omega(\mathcal{A})$  se e solo se  $\pi_\omega(a) = \omega(a)\mathbb{1}$ ).
3. Siano  $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$  e  $E_{jk} \in \mathcal{A}$  tali che  $(E_{jk})_{il} = \delta_{ji}\delta_{kl}$ ,  $i, j, k, l = 1, \dots, n$ . Dato  $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$  e posto  $\rho_{jk} := \omega(E_{jk})$ ,  $j, k = 1, \dots, n$ , si mostri:
  - (a)  $\rho \geq 0$  e  $\text{tr} \rho = 1$ ;
  - (b)  $\omega(T) = \text{tr}(\rho T)$  per ogni  $T \in \mathcal{A}$ ;

\* (c)  $\omega$  è puro se e solo se esiste  $x \in \mathbb{C}^n$  tale che  $\rho = |x\rangle\langle x|$  (cioè  $\rho y = \langle x, y \rangle x$  per ogni  $y \in \mathbb{C}^n$ ), e quindi  $\omega(T) = \langle x, Tx \rangle$  per ogni  $T \in \mathcal{A}$ .
4. Siano  $\omega \in \mathcal{S}$  e  $A \in \mathcal{O}$  rispettivamente uno stato e un'osservabile di un sistema fisico. Si verifichi che sono equivalenti:
  - (a)  $\text{Var}(\omega, A) = 0$ ;
  - (b)  $F_{\omega, A}(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda < \text{Exp}(\omega, A), \\ 1 & \lambda \geq \text{Exp}(\omega, A); \end{cases}$
  - (c) la misura di Lebesgue-Stieltjes definita da  $F_{\omega, A}$  è  $\delta_{\text{Exp}(\omega, A)}$ .