Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 10/5/13

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono particolarmente impegnativi.

1. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra con unità e ω uno stato di $\mathscr{A}$. Si verifichi
   (a) $\omega(a^*) = \overline{\omega(a)}$ per ogni $a \in \mathscr{A}$;
   (b) $\omega(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2\omega(b^*b)$ per ogni $a, b \in \mathscr{A}$.

2. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra, e $\pi_\alpha : \mathscr{A} \to B(H_\alpha)$, $\alpha \in I$, rappresentazioni. Mostrare:
   (a) per ogni $a \in \mathscr{A}$, l'operatore $\oplus_{\alpha\in I}\pi_\alpha(a) : \oplus_{\alpha\in I}H_\alpha \to \oplus_{\alpha\in I}H_\alpha$ definito da
   $$\oplus_{\alpha\in I}\pi_\alpha(a)(x_\alpha)_{\alpha\in I} := (\pi_\alpha(a)x_\alpha)_{\alpha\in I}, \qquad (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \oplus_{\alpha\in I}H_\alpha,$$
   è limitato;
   (b) $a \in \mathscr{A} \mapsto \oplus_{\alpha\in I}\pi_\alpha(a) \in B(\oplus_{\alpha\in I}H_\alpha)$ è una rappresentazione di $\mathscr{A}$ (detta al *somma diretta* delle π_α).

3. Si verifichi che si può eliminare l'ipotesi supplementare che la C*-algebra $\mathscr{A}$ abbia unità nella dimostrazione del teorema di Gelfand-Naimark fatta a lezione.

4. Sia π una rappresentazione della C*-algebra $\mathscr{A}$. Verificare che un sottospazio chiuso $K \subset H_\pi$ è invariante per π se e solo se il rispettivo proiettore ortogonale P_K appartiene a $\pi(\mathscr{A})'$.

5. Siano π una rappresentazione della C*-algebra $\mathscr{A}$ e $A \in \pi(\mathscr{A})'$ autoaggiunto. Si mostri che, se P è la misura spettrale associata ad A, $P(I) \in \pi(\mathscr{A})'$ per ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}$.

6. Sia π una rappresentazione della C-algebra $\mathscr{A}$. Si mostri che π è irriducibile se e solo se $\pi(\mathscr{A})' = \mathbb{C}\mathbb{1}$ (*lemma di Schur*).