Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 7/5/13

1. Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finita, e $M_f \in B(L^2(X, \mu))$ l'operatore di moltiplicazione per una $f \in L^\infty(X, \mu)$ reale. Calcolare la misura spettrale di M_f.

2. Siano $A \in B(H)$ autoaggiunto, e $x \in H$ tale che $\overline{C^*(\{\mathbb{1}, A\})x} = H$ (un tale vettore è detto *ciclico* per $C^*(\{\mathbb{1}, A\})$). Indicata con μ_x la misura di Borel su $\sigma(A)$ associata ad x tramite il teorema di Riesz-Markov, dimostrare che esiste un operatore unitario $U : H \to L^2(\sigma(A), \mu_x)$ tale che
$$UAU^* = M_\iota,$$
dove $\iota \in C(\sigma(A))$ è la funzione $\iota(\lambda) = \lambda$ (sugg.: poiché per ogni $f, g \in C(\sigma(A))$ si ha $\langle f(A)x, g(A)x\rangle_H = \langle f, g\rangle_{L^2(\sigma(A),\mu_x)}$, l'operatore $U : C^*(\{\mathbb{1}, A\})x \to C(\sigma(A))$ definito da $Uf(A)x = f$ è isometrico).

3. Sia $A \in B(H)$ autoaggiunto. Si mostri che $\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se esiste una successione $(x_n) \subset H$ tale che $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $Ax_n - \lambda x_n \to 0$.