

# Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 3/5/13

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (\*) sono particolarmente impegnativi.

1. Sia  $T \in B(H)$ ,  $H$  spazio di Hilbert. Mostrare che  $\ker T = (\operatorname{ran} T^*)^\perp$ .
2. Sia  $A \in B(H)$  autoaggiunto e tale che esista  $C > 0$  per cui  $\|Ax\| \geq C\|x\|$  per ogni  $x \in H$ . Si mostri:
  - (a)  $\ker A = \{0\}$ ;
  - (b)  $\operatorname{ran} A$  è denso in  $H$ ;
  - (c)  $\operatorname{ran} A$  è chiuso;
  - (d)  $A$  è invertibile.
3. Siano  $\mu_1, \mu_2$  misure di Borel regolari finite su uno spazio metrico  $X$ . Mostrare che per ogni funzione boreliana limitata  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  esiste una successione  $(f_n) \subset C_b(X)$  tale che  $f_n \rightarrow f$  sia in  $L^1(X, \mu_1)$  che in  $L^1(X, \mu_2)$ .
4. Verificare che l'applicazione  $S_f : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \in \operatorname{Bor}(X)$ , definita a lezione, è sesquilineare.
5. Verificare che per il calcolo funzionale boreliano  $\tilde{\rho} : \operatorname{Bor}(X) \rightarrow B(H)$ , definito a lezione, vale  $\tilde{\rho}(\bar{f}) = \tilde{\rho}(f)^*$ .
6. Siano  $P_1, P_2 \in B(H)$  proiettori ortogonali. Mostrare che sono equivalenti:
  - (a)  $P_1 \leq P_2$ ;
  - (b)  $\operatorname{ran} P_1 \subset \operatorname{ran} P_2$ ;
  - (c)  $P_1 P_2 = P_1 = P_2 P_1$ .