Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 23/4/13

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono particolarmente impegnativi.

1. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra, $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ un sottoinsieme, e

$$C^*(\mathscr{S}) := \bigcap \{\mathscr{B} \subset \mathscr{A} \text{ C*-sottoalgebra contenente } \mathscr{S}\}.$$

la C*-sottoalgebra di $\mathscr{A}$ generata da $\mathscr{S}$. Si verifichi che, usando la notazione $a^\sharp = a$ o a^*,

$$C^*(\mathscr{S}) = \overline{\langle a_1^\sharp \dots a_n^\sharp \,:\, a_i \in \mathscr{S}, i = 1, \dots, n, \, n \in \mathbb{N} \rangle}.$$

2. Siano $H = \ell^2(\mathbb{Z})$ e $U \in B(H)$ l'operatore definito da $Ue_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, con $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la base ortonormale canonica. Si mostri:
   (a) esiste un operatore unitario $V : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ tale che $U = VM_gV^*$, con $M_g \in B(L^2([0, 2\pi])$ l'operatore di moltiplicazione per la funzione $g(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$;
   (b) U è unitario e $\sigma(U) = \mathbb{T}$;
   (c) se $\mathscr{B} := \overline{\langle \mathbb{1}, U, U^2, \dots \rangle}$ è la sottoalgebra di Banach con unità di $B(H)$ generata da U, si ha $0 \in \sigma_{\mathscr{B}}(U)$ (sugg: se $p \in \mathscr{B}$ è un polinomio, $\langle U^*e_n, pe_n\rangle = 0$, da cui $U^* \notin \mathscr{B}$).

3. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra con unità, e $a_1, \dots, a_n \in \mathscr{A}$ elementi normali a due a due commutanti. Posto $\mathscr{B} := C^*(\{\mathbb{1}, a_1, \dots, a_n\})$, si mostri:
   (a) $\Omega(\mathscr{B})$ è omeomorfo a un sottoinsieme chiuso $X \subset \sigma(a_1)\times\cdots\times\sigma(a_n) \subset \mathbb{C}^n$ (lo *spettro congiunto* di $a_1, \dots, a_n$);
   (b) esiste un unico *-isomorfismo $\rho : C(X) \to \mathscr{B}$ tale che $\rho(\iota_k) = a_k$, dove $\iota_k \in C(X)$ è la funzione $\iota_k(\lambda) := \lambda_k$, $k = 1, \dots, n$ (*calcolo funzionale continuo congiunto* di $a_1, \dots, a_n$).

4. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ tale che esista $\rho : C(\sigma(A)) \to M_n(\mathbb{C})$ *-omomorfismo iniettivo unitale tale che $\rho(\iota) = A$, $\iota(\lambda) = \lambda$. Mostrare:
   (a) $P_\lambda := \rho(\chi_{\{\lambda\}})$, $\lambda \in \sigma(A)$, è un proiettore, e si ha $P_\lambda P_\mu = 0$ se $\lambda \neq \mu$;
   (b) vale
   $$\rho(f) = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} f(\lambda)P_\lambda, \qquad f \in C(\sigma(A)),$$
   da cui in particolare $\mathbb{1} = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} P_\lambda$, $A = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda P_\lambda$;
   (c) P_λ è il proiettore sull'autospazio di A associato all'autovalore $\lambda \in \sigma(A)$;
   (d) A è diagonalizzabile tramite matrici unitarie.

5. Sia $\mathscr{A}$ una C-algebra senza unità, e si consideri $\tilde{\mathscr{A}} := \mathscr{A} \oplus \mathbb{C}$ con la struttura di spazio vettoriale somma diretta. Si mostri:

(a) con le definizioni:

$$(a \oplus \lambda)(b \oplus \mu) := (ab + \lambda b + \mu a) \oplus (\lambda\mu), \qquad (a \oplus \lambda)^* := a^* \oplus \bar{\lambda},$$

$\tilde{\mathscr{A}}$ è una *-algebra con unità;

(b) definito l'operatore $L(a \oplus \lambda) : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ tramite $L(a \oplus \lambda)b := ab + \lambda b$, $b \in \mathscr{A}$, si ha $L(a \oplus \lambda) \in B(\mathscr{A})$ e $x \in \tilde{\mathscr{A}} \mapsto L(x) \in B(\mathscr{A})$ è un omomorfismo di algebre;

(c) $\|L(x)\|^2 \leq \|L(x^*x)\|$ per ogni $x \in \tilde{\mathscr{A}}$ (sugg.: un calcolo mostra $\|L(x)b\|^2 = \|b^* L(x^*x)b\|$, $x \in \tilde{\mathscr{A}}$, $b \in \mathscr{A}$);

(d) $\|L(a \oplus 0)\| = \|a\|$, $a \in \mathscr{A}$ (sugg.: $\|L(a \oplus 0)a^*\| = \|a\|^2$);

(e) esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\|L(a \oplus 1)\| > \varepsilon$ per ogni $a \in \mathscr{A}$ (sugg.: altrimenti esisterebbe $a_n \in \mathscr{A}$ tale che $\|L(a_n \oplus (-1))\| \leq 1/n$, ed essendo $\|a_n - a_m\| = \|L((a_n - a_m) \oplus 0)\|$ si avrebbe $a_n \to a$ per qualche $a \in \mathscr{A}$, da cui $\|ba_n - b\| = \|L((b \oplus 0)(a_n \oplus (-1)))\| \to 0$ e similmente $\|a_n b - b\| \to 0$);

(f) posto $\|x\| := \|L(x)\|$, $x \in \tilde{\mathscr{A}}$, si ha che $\tilde{\mathscr{A}}$ è una C*-algebra con unità.

6. Sia $\mathscr{A}$ una C*-algebra senza unità. Dato $\omega \in \Omega(\mathscr{A})$ si definisca $\tilde{\omega} : \tilde{\mathscr{A}} \to \mathbb{C}$ tramite $\tilde{\omega}(a \oplus \lambda) := \omega(a) + \lambda$. Si verifichi:

   (a) $\tilde{\omega} \in \Omega(\tilde{\mathscr{A}})$ e $\omega \mapsto \tilde{\omega}$ è continua e iniettiva;

   (b) $\Omega(\tilde{\mathscr{A}}) = \widetilde{\Omega(\mathscr{A})} \cup \{\omega_\infty\}$ dove $\omega_\infty(a \oplus \lambda) := \lambda$.

7. Siano X uno spazio compatto di Hausdorff e $\mathscr{A} \subset C(X)$ una *-sottoalgebra che separa i punti e tale che esista $x_0 \in X$ per cui $f(x_0) = 0$ per ogni $f \in \mathscr{A}$. Mostrare che $\bar{\mathscr{A}} = \{f \in C(X) : f(x_0) = 0\}$ (sugg.: $\tilde{\mathscr{A}} := \mathscr{A} + \mathbb{C}\mathbb{1} \subset C(X)$ è densa in $C(X)$, e data $f_n + \lambda_n \mathbb{1} \to f$ con $f(x_0) = 0$, $f_n \in \mathscr{A}$, si ha $f_n \to f$).

8. Sia $\mathscr{A}$ una C*-algebra senza unità. Si mostri che $\mathscr{A}$ è isometricamente *-isomorfa a $C_0(\Omega(\mathscr{A})) := \{f \in C(\Omega(\tilde{\mathscr{A}})) : f(\omega_\infty) = 0\}$ (sugg.: si consideri $a \in \mathscr{A} \mapsto \widehat{a \oplus 0}$, con $x \mapsto \hat{x}$ isomorfismo di Gelfand di $\tilde{\mathscr{A}}$).