Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 19/4/13

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono particolarmente impegnativi.

1. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach, e $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ una *-sottoalgebra. Posto $\mathscr{B}_{\mathrm{aa}} := \{b \in \mathscr{B} : b = b^*\}$, si verifichi che $\overline{\mathscr{B}} = \overline{\mathscr{B}_{\mathrm{aa}}} + i\overline{\mathscr{B}_{\mathrm{aa}}}$.

2. Mostrare che:
   (a) i polinomi trigonometrici
   $$\Big\{\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \sum_{|k|\le n} c_k e^{ik\theta} \, : \, c_k \in \mathbb{C},\, n \in \mathbb{N}\Big\}$$
   sono densi in $C_p([0, 2\pi]) := \{f \in C([0, 2\pi]) : f(0) = f(2\pi)\}$ (sugg.: $C_p([0, 2\pi]) \simeq C(\mathbb{T})$);
   (b) posto $e_n(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di $L^2([0, 2\pi])$;
   (c) la serie di Fourier di una $f \in L^2([0, 2\pi])$ converge a f in $L^2([0, 2\pi])$.

3. Mostrare che:
   (a) i polinomi sono densi in $C([a, b])$ (teorema di Weierstrass);
   (b) i polinomi di Legendre $(P_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$, ottenuti tramite il procedimento di Gram-Schmidt in $L^2([-1, 1])$ a partire dalle funzioni $x \mapsto x^\ell$, sono una base ortonormale in $L^2([-1, 1])$;
   (c) si ha
   $$P_\ell(x) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{2}} \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2 - 1)^\ell, \qquad x \in [-1, 1],\ \ell \in \mathbb{N}.$$

4. Siano X, Y spazi metrici con X completo, e $f : X \to Y$ isometrica. Mostrare che se $C \subset X$ è chiuso, allora $f(C) \subset Y$ è chiuso.

5. Sia X uno spazio metrico compatto. Verificare che $C(X)$ separa i punti di X.

*6. Siano X uno spazio compatto di Hausdorff, e $\delta_x \in \Omega(X)$ dato da $\delta_x(f) := f(x)$, $x \in X$. Si mostri:
   (a) dato per scontato che $C(X)$ separa i punti di X, $x \mapsto \delta_x$ è iniettiva;
   (b) $x \mapsto \delta_x$ è suriettiva (sugg.: se per assurdo $\omega \in \Omega(C(X))$ è tale che per ogni $x \in X$ esiste $f_x \in C(X)$ con $\omega(f_x) \neq f_x(x)$, posto $g_x := f_x - \omega(f_x)$ si può trovare un ricoprimento aperto $(A_{x_j})_{j=1,\dots,n}$ di X tale che $g_{x_j}(y) \neq 0$ per ogni $y \in A_{x_j}$, $j = 1, \dots, n$, e posto allora $g := |g_{x_1}|^2 + \cdots + |g_{x_n}|^2 \in \ker\omega$ si ha $g^{-1} \in C(X)$ e $1 = gg^{-1} \in \ker\omega$);
   (c) X è omeomorfo a $\Omega(C(X))$.

7. Siano $\mathscr{B}$ un'algebra di Banach con unità, e $a \in \mathscr{B}$ tale che $\sigma(a) = \{0\}$ (un tale elemento è detto *topologicamente nilpotente*), e sia $\mathscr{A} := \overline{\langle \mathbb{1}, a, a^2, \dots \rangle} \subset \mathscr{B}$ la sottoalgebra chiusa di $\mathscr{B}$ generata da a. Si mostri:
   (a) $x \in \mathscr{A}$ se e solo se $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k a^k$ (serie convergente in $\mathscr{B}$);
   (b) $\Omega(\mathscr{A}) = \{\omega_0\}$, con $\omega_0(x) = \lambda_0$;
   (c) la trasformata di Gelfand $\hat{}: \mathscr{A} \to C(\Omega(\mathscr{A}))$ non è iniettiva.