Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 16/4/13

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono particolarmente impegnativi.

1. Siano X uno spazio vettoriale e $M \subset X$ un sottospazio. Si verifichi:
   (a) le operazioni
   $$\begin{aligned}(x+M)+(y+M) &:= x+y+M,\\ \lambda(x+M) &:= \lambda x + M,\end{aligned} \qquad x,y \in X,\ \lambda \in \mathbb{C},$$
   sono ben definite e dotano $X/M = \{x+M : x \in X\}$ di una struttura di spazio vettoriale;
   (b) se $X = \mathscr{A}$ è un'algebra e $M = \mathscr{I}$ un ideale, il prodotto
   $$(a+\mathscr{I})(b+\mathscr{I}) := ab + \mathscr{I}, \qquad a,b \in \mathscr{A},$$
   è ben definito e rende $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ un'algebra.
2. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in uno spazio metrico X. Si mostri che se esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a $x \in X$, allora $x_n \to x$.
3. Siano H uno spazio di Hilbert e $K \subset H$ un sottospazio chiuso. Mostrare che $H/K \simeq K^\perp$ (isometricamente isomorfo), e che quindi H/K è uno spazio di Hilbert.
4. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra normata e $\mathscr{I} \subset \mathscr{A}$ un ideale. Verificare che $\bar{\mathscr{I}}$ è un ideale.
5. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach con identità (tale che $\|\mathbb{1}\| = 1$) e $\mathscr{I} \subset \mathscr{A}$ un ideale. Si verifichi:
   (a) se $\mathscr{I}$ è un'ideale proprio, $\|\mathbb{1} + z\| \geq 1$ per ogni $z \in \mathscr{I}$;
   (b) se $\mathscr{I}$ è un'ideale chiuso, $\mathbb{1} + \mathscr{I}$ è l'identità di $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ e $\|\mathbb{1} + \mathscr{I}\| = 1$.
6. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach con identità (tale che $\|\mathbb{1}\| = 1$) e $\omega : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ un carattere. Mostrare che $\|\omega\| = 1 = \omega(\mathbb{1})$ (sugg.: se $\mathscr{I} = \ker\omega$, $|\omega(a)| = \|\omega(a)\mathbb{1} + \mathscr{I}\| = \|a + \mathscr{I}\|$).

*7. Si dimostri:
   (a) dati $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ la serie
   $$(a * b)_n := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n-k} b_k, \qquad n \in \mathbb{Z},$$
   è assolutamente convergente e $\|a*b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$; $a*b$ è detto la *convoluzione* di $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$;
   (b) definendo, per $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $a^*_n := \overline{a_{-n}}$, si ha che $\ell^1(\mathbb{Z})$, con il prodotto di convoluzione, è una *-algebra di Banach con identità;
   (c) per ogni $\lambda \in \mathbb{T}$, $\omega_\lambda : \ell^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ definito da
   $$\omega_\lambda(a) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \lambda^n, \qquad a \in \ell^1(\mathbb{Z}),$$
   è un carattere di $\ell^1(\mathbb{Z})$;

(d) per ogni $\omega \in \Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$ esiste un'unico $\lambda \in \mathbb{T}$ tale che $\omega = \omega_\lambda$ (sugg.: siano $\zeta := (\delta_{n,1})_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $\zeta^{-1} = (\delta_{n,-1})_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$; allora $\langle \zeta^n \ : \ n \in \ell^1(\mathbb{Z})\rangle$ è denso in $\ell^1(\mathbb{Z})$, e posto $\lambda := \omega(\zeta)$...);

(e) l'applicazione $\lambda \in \mathbb{T} \mapsto \omega_\lambda \in \Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$ è biunivoca, continua e con inversa continua (cioè è un *omeomorfismo* di spazi topologici) (sugg.: l'inversa $\omega \mapsto \omega(\zeta)$ va da uno spazio compatto a uno di Hausdorff);

(f) identificando, come spazi topologici, $\Omega(\ell^1(\mathbb{Z}))$ con il cerchio unitario $\mathbb{T}$ tramite l'applicazione del punto (e), la trasformata di Gelfand di $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ si identifica con la funzione $\hat{a} \in C(\mathbb{T})$ data da

$$\hat{a}(e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}, \qquad e^{i\theta} \in \mathbb{T},$$

cioè con la trasformata di Fourier della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.