Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 9/4/13

1. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione. Si verifichi che

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \geq \limsup_{n\to+\infty} x_n \;\Rightarrow\; \exists \lim_{n\to+\infty} x_n = \liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

2. Dato il triangolo $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ e $k \in C(T)$, si definisca l'operatore di Volterra $K : C([0, 1]) \to C([0, 1])$:

$$(Kf)(x) := \int_0^x k(x, y)f(y)\, dy, \qquad f \in C([0, 1]),\ x \in [0, 1].$$

   Mostrare che:

   (a) effettivamente $Kf \in C([0, 1])$ se $f \in C([0, 1])$;

   (b) esiste $M > 0$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\|K^n\| \leq M^n/n!$;

   (c) per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e ogni $g \in C([0, 1])$, l'*equazione di Volterra di seconda specie*

$$\int_0^x k(x, y)f(y)\, dy - \lambda f(x) = g(x), \qquad x \in [0, 1],$$

   ha un'unica soluzione $f \in C([0, 1])$.

3. Sia $\mathscr{A}$ una C*-algebra con unità $\mathbb{1}$. Si verifichi che $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$ e $\|\mathbb{1}\| = 1$.

4. Sia p un proiettore in una C*-algebra. Mostrare che $\sigma(p) \subset \{0, 1\}$.

5. Sia $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach. Mostrare:

   (a) per ogni $a \in \mathscr{A}$, la serie $e^a := \sum_{n=0}^{+\infty} a^n/n!$ è convergente in $\mathscr{A}$;

   (b) dati $a, b \in \mathscr{A}$ tali che $ab = ba$, si ha $e^a e^b = e^{a+b}$.

6. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach commutativa con unità e $\Omega(\mathscr{A}) = \{\omega : \mathscr{A} \to \mathbb{C} \text{ carattere}\}$ lo spettro di Gelfand di $\mathscr{A}$. Si mostri che

   (a) la famiglia τ di sottoinsiemi di $\Omega(\mathscr{A})$ che sono unioni arbitrarie di insiemi della forma

$$B(a_1, \dots, a_n; V_1, \dots, V_n) := \{\omega \in \Omega(\mathscr{A}) \,:\, \omega(a_1) \in V_1, \dots, \omega(a_n) \in V_n\},$$

   dove $a_i \in \mathscr{A}$, e $V_i \subset \mathbb{C}$ aperto, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, è una topologia su $\Omega(\mathscr{A})$;

   (b) un net $(\omega_\alpha)_{\alpha\in I} \subset \Omega(\mathscr{A})$ converge a $\omega \in \Omega(\mathscr{A})$ nella topologia τ se e solo se $\omega_\alpha(a) \to \omega(a)$ per ogni $a \in \mathscr{A}$;

   (c) per ogni $a \in \mathscr{A}$ la trasformata di Gelfand $\hat{a} : \Omega(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}$, $\omega \mapsto \omega(a)$, è continua;

   (d) τ è la più debole topologia su $\Omega(\mathscr{A})$ tale che tutte le funzioni $\hat{a} : \Omega(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}$, $a \in \mathscr{A}$, sono continue.