Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 5/4/13

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono particolarmente impegnativi.

1. Siano H uno spazio di Hilbert, e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ una successione di vettori linearmente indipendenti. Definita una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tramite il *procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt*:
$$f_1 := x_1, \quad f_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} f_1, \quad f_3 := x_3 - \frac{\langle x_3, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} f_1 - \frac{\langle x_3, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle} f_2, \quad \dots$$
dimostrare che i vettori $e_n := f_n/\|f_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, sono un sistema ortonormale in H tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\langle e_1, \dots, e_n\rangle = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$.

*2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $e^{\delta|x|} f \in L^1(\mathbb{R})$ per qualche $\delta > 0$. Mostrare allora che la trasformata di Fourier
$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ipx}\, dx, \qquad p \in \mathbb{R}$$
di f si estende ad una funzione analitica nella striscia $\{p \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, p| < \delta\}$ e che si ha lo sviluppo di MacLaurin
$$\hat{f}(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ip)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x) x^n\, dx, \qquad |p| < \delta.$$

3. Le *funzioni di Hermite* $\psi_n \in L^2(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, sono definite applicando il procedimento di Gram-Schmidt alle funzioni $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n e^{-x^2/2}$ e pertanto hanno la forma $\psi_n(x) = H_n(x) e^{-x^2/2}$, con gli H_n polinomi di grado n, detti *polinomi di Hermite*. Dimostrare:
   (a) $\{x^n e^{-x^2/2} : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ (sugg.: se $\psi \in \{x^n e^{-x^2/2} : n \in \mathbb{N}\}^\perp$, applicare l'esercizio 2 a $f = \psi e^{-x^2/2}$);
   (b) $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una base ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$;
   (c) vale la *formula di Rodrigues*:
$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}\pi^{1/4}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$
   (sugg.: basta verificare, integrando per parti, che se H_n è dato dalla formula di sopra, allora $\langle x^k e^{-x^2/2}, H_n e^{-x^2/2}\rangle = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, e $\|H_n e^{-x^2/2}\|_2 = 1$);
   (d) si ha
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\psi_n = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)\psi_n = \begin{cases} \sqrt{n}\,\psi_{n-1}, & n \geq 1, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$
$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\psi_n = (2n+1)\psi_n.$$

4. Dimostrare che applicando il procedimento di Gram-Schmidt in $L^2([0,+\infty))$ alle funzioni $x \mapsto x^n e^{-x}$ si ottengono funzioni $x \mapsto L_n(x)e^{-x}$, con gli L_n polinomi di grado n detti *polinomi di Laguerre*, che formano una base ortonormale in $L^2([0,+\infty))$.

5. Si mostri che esiste un'isometria $U \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ tale che $U\delta_n = \delta_{n+1}$ ($(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonica), e che U non è unitario.

6. Considerata l'algebra di Banach $\mathscr{A} := C(X)$, X spazio compatto di Hausdorff, mostrare che data $f \in C(X)$ si ha $\sigma(f) = f(X)$.

*7. Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finita e $H := L^2(X,\mu)$. Data $f \in L^\infty(X,\mu)$ si definisca *l'operatore di moltiplicazione* per f:

$$(M_f\psi)(x) := f(x)\psi(x), \qquad x \in X,\ \psi \in H.$$

Si dimostri:

(a) $f \in L^\infty \mapsto M_f \in B(L^2)$ è uno *-omomorfismo isometrico di C*-algebre, cioè è lineare, moltiplicativo, isometrico e rispetta lo * (sugg.: per l'isometria, si ha $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty - 1/n\}) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi se $\psi = \chi_{\{|f|>\|f\|_\infty - 1/n\}} \cdots$);

(b) $\lambda \in \sigma(M_f)$ se e solo se $\mu(\{|f-\lambda| < \varepsilon\}) > 0$ per ogni $\varepsilon > 0$ (sugg.: se $\mu(\{|f-\lambda| < 1/n\}) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, se esistesse $(\lambda 1 - M_f)^{-1} \in B(H)$, considerare $\|(\lambda 1 - M_f)^{-1}\chi_{\{|f-\lambda|<1/n\}}\|^2$);

(c) $\lambda \in \sigma_p(M_f)$ se e solo se $\mu(f^{-1}(\{\lambda\})) > 0$.