Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 2/4/13

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono particolarmente impegnativi.

1. Siano X uno spazio normato e $S \subset X$ un sottoinsieme. Indicando con
$$\langle S \rangle := \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \,:\, x_i \in S,\, \alpha_i \in \mathbb{C},\, n \in \mathbb{N} \Big\}$$
il sottospazio di X generato da S, mostrare che $\overline{\langle S \rangle}$ è un sottospazio chiuso di X (detto ovviamente il *sottospazio chiuso* generato da S).

2. Siano H uno spazio di Hilbert, e $S \subset H$ un sottoinsieme. Definito l'*ortogonale* di S come
$$S^\perp := \{x \in H \,:\, \langle x, y \rangle = 0 \,\forall y \in S\},$$
verificare:
   (a) $S^\perp$ è un sottospazio chiuso di H;
   (b) se $S_1 \subset S_2$ allora $S_2^\perp \subset S_1^\perp$;
   (c) $S^\perp = \big(\overline{\langle S \rangle}\big)^\perp$;
   (d) $(S^\perp)^\perp = \overline{\langle S \rangle}$.

3. Siano H uno spazio di Hilbert e $K \subset H$ un sottospazio chiuso. Mostrare che H è isometricamente isomorfo a $K \oplus K^\perp$ (cioè esiste $j : H \to K \oplus K^\perp$ isometria lineare suriettiva).

4. Sia $H = \ell^2(\mathbb{N})$.
   (a) Se $x = (x_n) \in H$, verificare che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^n$ ha raggio di convergenza $r \geq 1$.
   (b) Dato $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$, verificare che posto $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \lambda^n$, $x \in H$, si ha $f \in H^*$.
   (c) Determinare $y \in H$ tale che $f(x) = \langle y, x \rangle$ per ogni $x \in H$, e calcolare $\|f\|$.

5. Sia $(\delta_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \ell^2(I)$ il sistema ortonormale canonico: $\delta_\alpha = (\delta_{\alpha\beta})_{\beta \in I}$. Senza usare il teorema di caratterizzazione delle basi ortonormali, dimostrare che per ogni $x = (x_\alpha) \in \ell^2(I)$ si ha $x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha \delta_\alpha$.

6. Mostrare che, se $x \in H$ e $(e_\alpha)_{\alpha \in I} \subset H$ è un sistema ortonormale, l'insieme $\{\alpha \in I \,:\, \langle e_\alpha, x \rangle \neq 0\}$ è al più numerabile (sugg.: si ha $\sharp\{\alpha \in I \,:\, |\langle e_\alpha, x \rangle| \geq 1/n\} \leq n^2 \sum_{\alpha \in I} |\langle e_\alpha, x \rangle|^2$).

*7. Ricordiamo che una *base (di Hamel)* di uno spazio vettoriale V è una famiglia linearmente indipendente di vettori di V tale che ogni vettore si scriva come combinazione lineare (finita) di suoi elementi. Dimostrare che una base ortonormale di uno spazio di Hilbert H infinito-dimensionale non è una base di Hamel, e che una base di Hamel di H ha cardinalità più che numerabile.