Corso di Fondamenti di Analisi Matematica a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 26/3/13

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono particolarmente impegnativi.

1. Siano (X, d) uno spazio metrico, e μ una misura di Borel su X. Mostrare che $C_b(X)$ è chiuso in $L^\infty(X, \mu)$ (sugg.: ricordare la dimostrazione di completezza di L^∞). Dare esempi in cui $C_b(X) = L^\infty(X, \mu)$ e $C_b(X) \subsetneq L^\infty(X, \mu)$.

2. Siano $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$, $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle_K)$ spazi di Hilbert. Sullo spazio vettoriale somma diretta

$$H \oplus K := \{(x, y) : x \in H, y \in K\},$$

i cui elementi saranno denotati con $x \oplus y := (x, y)$, si definisca

$$\langle x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2 \rangle := \langle x_1, x_2 \rangle_H + \langle y_1, y_2 \rangle_K, \qquad x_i \oplus y_i \in H \oplus K.$$

Verificare che $(H \oplus K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è uno spazio di Hilbert, detto *somma diretta (hilbertiana)* di H e K.

*3. Siano $(H_\alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha)$, $\alpha \in I$, spazi di Hilbert, e si definisca

$$\bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha := \Big\{ (x_\alpha)_{\alpha \in I} : x_\alpha \in H_\alpha \,\forall \alpha \in I, \sum_{\alpha \in I} \|x_\alpha\|_\alpha^2 < \infty \Big\}.$$

Verificare:

(a) $\bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha$ è uno spazio vettoriale con le operazioni definite da

$$(x_\alpha)_{\alpha \in I} + (y_\alpha)_{\alpha \in I} := (x_\alpha + y_\alpha)_{\alpha \in I}, \qquad \lambda (x_\alpha)_{\alpha \in I} := (\lambda x_\alpha)_{\alpha \in I};$$

(b) $\bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare definito da

$$\big\langle (x_\alpha)_{\alpha \in I}, (y_\alpha)_{\alpha \in I} \big\rangle := \sum_{\alpha \in I} \langle x_\alpha, y_\alpha \rangle_\alpha.$$

4. Siano X, Y spazi prehilbertiani, e $j : X \to Y$ un'applicazione che preserva i prodotti scalari. Mostrare che j è lineare (sugg.: calcolare $\|j(x + y) - j(x) - j(y)\|^2$, $\|j(\alpha x) - \alpha j(x)\|^2$).

5. Mostrare che $\ell^2(I)$ è il completamento dello spazio prehilbertiano

$$c_c(I) := \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} : x_\alpha \in \mathbb{C},\, x_\alpha \neq 0 \text{ solo per un insieme finito di } \alpha \in I\}$$

con il prodotto scalare $\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in I} \bar{x}_\alpha y_\alpha$.