Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 22/3/13

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono particolarmente impegnativi.

1. Sia $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una numerazione dei razionali in $(0,1)$ e, dato $\varepsilon > 0$, si considerino gli insiemi

$$A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Big(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\Big) \cap (0,1)$$

   e $K = [0,1] \setminus A$. Dimostrare:

   (a) A, K sono Lebesgue-misurabili e $m(A) \leq \varepsilon$, $m(K) \geq 1 - \varepsilon$;

   (b) A è denso in $(0,1)$ e K ha interno vuoto;

   *(c) K non è PJ-misurabile (sugg.: si ha $m_e(K) \geq 1 - \varepsilon$: se così non fosse, si potrebbe trovare un plurintervallo aperto $E \subset \mathbb{R}$ tale che $K \subset E$ e $m(E) < 1 - \varepsilon$, ma allora $[0,1] \setminus E \subset A$...)

2. Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Dimostare:

   (a) $f : X \to \mathbb{C}$ è misurabile se e solo se $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : X \to \mathbb{R}$ sono misurabili;

   (b) $f : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ è misurabile $\Leftrightarrow \{f > a\} \in \mathfrak{M}$ per ogni $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{f \geq a\} \in \mathfrak{M}$ per ogni $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{f < a\} \in \mathfrak{M}$ per ogni $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{f \leq a\} \in \mathfrak{M}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;

   (c) se $f : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ è misurabile anche $|f|$ lo è;

   (d) se $f_n : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$ sono misurabili;

   (e) se $f_n : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $E := \{x \in X : \exists f(x) := \lim_{n\to+\infty} f(x)\} \in \mathfrak{M}$ e $f : E \to \tilde{\mathbb{R}}$ è misurabile (rispetto alla σ-algebra $\mathfrak{M}_E := \{F \cap E : F \in \mathfrak{M}\}$ su E).

3. Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura, e $f : X \to \mathbb{C}$ misurabile. Dimostrare:

   (a) se $f \geq 0$ e $\int_X f\, d\mu = 0$ allora $f = 0$ q.o.;

   (b) se $f \in L^1(X, \mu)$ e $\int_E f\, d\mu = 0$ per ogni $E \in \mathfrak{M}$, allora $f = 0$ q.o.;

   (c) se $\int_X |f| d\mu < +\infty$, allora $|f| < +\infty$ q.o.

4. Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Verificare:

   (a) se $f : X \to \mathbb{C}$ è misurabile, la funzione $t \mapsto \mu(\{|f| > t\})$ è continua a destra;

   (b) se f è essenzialmente limitata, $\|f\|_\infty = \min\{t \geq 0 : \mu(\{|f| > t\}) = 0\}$;

   (c) $\|\cdot\|_\infty$ è una norma su $L^\infty(X, \mu)$;

   *(d) $(L^\infty(X, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach. (Sugg.: data $(f_n) \subset L^\infty$ di Cauchy, sia E l'unione, su $k, m, n \in \mathbb{N}$, degli insiemi $A_k := \{|f_k| > \|f_k\|_\infty\}$, $B_{m,n} := \{|f_m - f_n| > \|f_m - f_n\|_\infty\}$; allora $\mu(E) = 0$ e $\ell^\infty(E^c)$ è completo.)

5. Sia I un insieme. Dimostrare che $\int_I f d\mu_\sharp = \sum_{\alpha\in I} f(\alpha)$ per ogni f per cui ha senso, e che quindi $L^p(I, \mu_\sharp) = \ell^p(I)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$ ($\mu_\sharp$ è la misura che conta in I). Che succede se al posto di $\mu_\sharp$ si usa δ_{x_0}?

6. Dato uno spazio metrico (X, d), e posto $\mathrm{dist}(x, B) := \inf_{y \in B} d(x, y)$, $x \in X$, $B \subset X$, verificare:
   (a) $x \in X \mapsto \mathrm{dist}(x, B)$ è continua;
   (b) se C è chiuso e $x \notin C$, allora $\mathrm{dist}(x, C) > 0$.
7. Mostrare che $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N})$ e che, se $\mu(X) < \infty$, $L^2(X, \mu) \subset L^1(X, \mu)$. Mostrare che, usando la misura di Lebesgue, $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$.