Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 19/3/13

1. Sia $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ un net in uno spazio topologico X. Un $x \in X$ è un *punto limite* per (x_α) se per ogni intorno U di x ed ogni $\alpha \in I$ esiste $\alpha' \geq \alpha$ tale che $x_{\alpha'} \in U$. Dimostrare:

   (a) se esiste un sottonet $(y_\beta)_{\beta\in J}$ di (x_α) convergente a $x \in X$, allora x è un punto limite per (x_α);

   (b) se $x \in X$ è un punto limite di (x_α), allora definendo un ordine parziale diretto su $J := \mathscr{I}_x \times I$ tramite
   $$(U', \alpha') \geq (U, \alpha) \Leftrightarrow U' \subset U, \alpha' \geq \alpha,$$
   e definendo $f : J \to I$ tramite $f(U, \alpha) := \alpha'$, dove $\alpha' \in I$ è tale che $\alpha' \geq \alpha$ e $x_{\alpha'} \in U$, si ha che $(x_{f(\beta)})_{\beta\in J}$ è un sottonet di (x_α) convergente a x.

   In sostanza: (x_α) ammette un sottonet convergente a x se e solo se x è un suo punto limite.

2. Siano X, Y spazi topologici con X compatto, e $f : X \to Y$ continua. Mostrare che allora $f(X)$ è compatto in Y (con la topologia relativa).

3. Sia X compatto e $C \subset X$ chiuso. Mostrare che allora C è compatto (con la topologia relativa).

4. Sia X spazio di Hausdorff e $K \subset X$ compatto. Mostrare che allora K è chiuso.

5. Siano X compatto, Y di Hausdorff e $f : X \to Y$ continua e biunivoca. Mostrare che allora $f^{-1} : Y \to X$ è continua.

6. Sia X spazio normato di dimensione infinita, e $K \subset X$ compatto. Mostrare che K ha interno vuoto.

7. Sia X uno spazio topologico. La famiglia di sottoinsiemi di X
   $$\mathscr{B}(X) := \bigcap\{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \subset \mathscr{P}(X)\, \sigma\text{-algebra t.c. } A \in \mathfrak{M}\ \forall A \subset X \text{ aperto}\}$$
   è la più piccola σ-algebra su X che contiene tutti gli insiemi aperti.