Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 12/3/13

1. Dimostrare che su $X = C^1([a,b])$ la norma $\|f\|_{(1)} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ è strettamente più forte di $\|\cdot\|_\infty$ (cioè esiste $C > 0$ tale che $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{(1)}$, ma non il viceversa).
2. Sia $(X, \|\cdot\|)$ normato. Verificare che $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ per ogni $x, y \in X$.
3. Siano X, Y spazi normati con X finito-dimensionale, e $T : X \to Y$ lineare. Dimostrare che T è limitato.
4. Mostrare che su $X = \mathbb{C}^n$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \qquad x \in \mathbb{C}^n.$$
5. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi normati, e si consideri $X \times Y$ con la struttura di spazio vettoriale *somma diretta*:
$$\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2) := (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2), \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, x_i \in X, y_i \in Y.$$
Verificare che ponendo
$$\|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}, \quad \|(x,y)\|_1 := \|x\|_X + \|y\|_Y, \quad \|(x,y)\|_2 := \big(\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2\big)^{1/2},$$
si ottengono norme su $X \times Y$ che sono topologicamente equivalenti.
6. Siano (X, d) uno spazio metrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente. Mostrare che (x_n) è di Cauchy.
7. Mostrare che uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ con X finito-dimensionale è di Banach.
8. Verificare che $\mathbb{R}$, con la metrica $d(x, y) = |e^x - e^y|$, non è completo (sugg.: considerare $x_n = -n$.)
9. Sia $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \subset \mathbb{R}_+$, I insieme di indici arbitrario. Mostrare che
$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sup_{F\in\mathscr{P}_0(I)} \sum_{\alpha\in F} x_\alpha$$
($\mathscr{P}_0(I)$ insieme delle parti finite di I).
10. Verificare che $(\ell^1(I), \|\cdot\|_1)$, $(\ell^2(I), \|\cdot\|_2)$ sono spazi normati.