Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 8/3/13

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono particolarmente impegnativi.

1. Siano $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e Δ l'insieme delle decomposizioni di $[a,b]$:
$$\delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b\}.$$
Si definisca su Δ una relazione $\leq$ dicendo che $\delta_1 \leq \delta_2$ se $\delta_1 \subset \delta_2$ (cioè δ_2 è ottenuta da δ_1 aggiungendo dei punti). Data inoltre $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann, si ponga
$$\sigma_\delta := \sum_{k=1}^n \Big(\inf_{[x_k,x_{k+1}]} f\Big)(x_{k+1} - x_k), \qquad \Sigma_\delta := \sum_{k=1}^n \Big(\sup_{[x_k,x_{k+1}]} f\Big)(x_{k+1} - x_k).$$
Dimostrare che
   (a) $(\Delta, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato diretto;
   (b) $\lim_\delta \sigma_\delta = \lim_\delta \Sigma_\delta = \int_a^b f$ nel senso dei net in $\mathbb{R}$ (con la topologia usuale).

   (Sugg.: f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che $\Sigma_\delta - \sigma_\delta < \varepsilon$.)

2. Siano (X, d) uno spazio metrico e $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ un net. Verificare che sono equivalenti
   (a) $x_\alpha \to x$;
   (b) $d(x_\alpha, x) \to 0$ come net in $\mathbb{R}$ (con la topologia usuale);
   (c) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\alpha_\varepsilon \in I$ tale che se $\alpha \geq \alpha_\varepsilon$ allora $d(x_\alpha, x) < \varepsilon$.

   In particolare, se $I = \mathbb{N}$ si ritrova la nozione di convergenza di una successione in uno spazio metrico.

3. Siano X, Y spazi metrici, $D \subset X$, x_0 punto di accumulazione per D e $f : D \to Y$. Verificare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se per ogni successione $(x_n) \subset D\setminus\{x_0\}$ tale che $x_n \to x$, si ha $f(x_n) \to \ell$.

4. Siano X, Y, Z spazi topologici, e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funzioni. Mostrare che se f è continua in $x_0 \in X$ e g è continua in $f(x_0) \in Y$ allora $g \circ f : X \to Z$ è continua in x_0.

5. Siano X, Y spazi topologici e $f : X \to Y$ funzione. Verificare che f è continua in X se e solo se per ogni chiuso $C \subset Y$, $f^{-1}(C)$ è un chiuso di X.

*6. Su $X = [0,1]$ si definisca una topologia dichiarando che $C \subset [0,1]$ è chiuso se e solo se è al più numerabile, o $C = X$. Dimostrare che $f : X \to \mathbb{R}$ è continua, se si dota l'immagine $\mathbb{R}$ della topologia usuale, se e solo se è costante.

7. Sia $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, con $\mathbb{C}^n$ dotato della norma euclidea, e si indichi con $\sigma(T)$ lo spettro di T. Dimostrare:
   (a) se $T = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ è diagonale, allora $\|T\| = \max_j |\lambda_j|$;

(b) se T è hermitiana ($T^* = T$), allora $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ (se T è hermitiana, $T = UDU^*$ con D diagonale e $U^*U = UU^* = 1$);

(c) per T generica, $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T^*T)} |\lambda|^{1/2}$.

8. Siano $X = C^1([a,b])$, $Y = C^0([a,b])$ e $D : X \to Y$ definito da $Df := f'$. Mostrare che:

   (a) ponendo
   $$\|f\|_{(1)} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \qquad f \in C^1([a,b]),$$
   si definisce una norma su X;

   (b) se su X si mette la norma $\|\cdot\|_{(1)}$ e su Y la norma $\|\cdot\|_\infty$, D è limitato e $\|D\| = 1$ (sugg.: considerare le funzioni $f(t) = e^{\alpha t}$ e fare $\alpha \to +\infty$);

   (c) se si mette la norma $\|\cdot\|_\infty$ sia su X che su Y, D non è limitato (sugg.: considerare le funzioni $f_n(t) := \frac{\sin nt}{n}$).