Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2012-13

G. Morsella

Esercizi del 5/3/13

1. Su $X := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, la palla unitaria in $\mathbb{R}^2$, si definisca
$$d(x,y) := \begin{cases} |x-y| & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono allineati con l'origine,} \\ |x|+|y| & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad x, y \in X$$
($|\cdot|$ norma euclidea in $\mathbb{R}^2$). Dimostrare che (X, d) è uno spazio metrico.

2. Siano (X, d) uno spazio metrico, $x \in X$ e $\delta > 0$. Dimostrare che le palle
$$B_\delta(x) := \{y \in X \,:\, d(x,y) < \delta\}, \qquad \bar{B}_\delta(x) := \{y \in X \,:\, d(x,y) \leq \delta\}$$
sono, rispettivamente, aperta e chiusa (nella topologia indotta da d).

3. Sia X un insieme di cardinalità n. Mostrare che $\mathscr{P}(X)$, l'insieme delle parti di X, ha cardinalità 2^n.

4. Siano X un insieme e B_α, $\alpha \in I$, una collezione di suoi sottoinsiemi (I insieme arbitrario di indici). Dimostrare la *dualità di De Morgan*:
$$\Big(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha^c.$$

5. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che
   (a) $\emptyset$, X sono chiusi;
   (b) se C_α, $\alpha \in I$, sono chiusi, allora $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ è chiuso;
   (c) se $C_1, \dots, C_n$ sono chiusi, allora $C_1 \cup \dots \cup C_n$ è chiuso.

6. Siano (X, d) uno spazio metrico, e $x \in X$. Verificare che le famiglie di insiemi
$$\mathscr{B}_x^1 := \{B_\delta(x) \,:\, \delta > 0\}, \quad \mathscr{B}_x^2 := \{\bar{B}_\delta(x) \,:\, \delta > 0\}, \quad \mathscr{B}_x^3 := \{B_{\delta_n}(x) \,:\, n \in \mathbb{N}\} \ (\delta_n \to 0),$$
sono basi di intorni di x.

7. Verificare che la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$
$$\tau_\iota := \{(a, +\infty) \,:\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$
definisce una topologia su $\mathbb{R}$ che non è di Hausdorff.

8. Siano (X, d) uno spazio metrico, $x \in X$ e $B \subset X$. Mostrare che x è un punto di accumulazione per B se e solo se esiste una successione $(x_j) \subset B \setminus \{x\}$ tale che $x_j \to x$.