Test di Calcolo mod. 2
Corso di Laurea in Scienza e Tecnologia dei Media
A.A. 2011/2012

A

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):..

Esercizio 1a. Calcolare il minimo comune multiplo tra 12 e 8.

Risposta: 24.

Esercizio 1b. Calcolare il perimetro del triangolo di vertici $A = (1, 4)$, $B = (-3, 1)$, $C = (1, -2)$.

Risposta: 16.

Esercizio 1c. Calcolare

$$\frac{\partial}{\partial x} \log(1 + \cos(3x^2 + y^3)).$$

Risultato:

$$-\frac{6x \sin(3x^2 + y^3)}{1 + \cos(3x^2 + y^3)}.$$

Esercizio 1d. Determinare l'insieme dei punti di accumulazione in $\mathbb{R}^2$ dell'insieme

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) \, : \, n \in \mathbb{N}, y \in [0, 1] \right\}.$$

Risultato:

$$\mathcal{D}A = A \cup \{(0, y) \, : \, y \in [0, 1]\}.$$

(Attenzione, non verranno tollerati errori di segno, "minori stretti" confusi con "minori o uguali", eccetera.)

Esercizio 2. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2+y^2)^\alpha + (x^2+y^2)^{2\alpha}}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha^2 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che f sia continua. Per quali di tali α la funzione f è anche differenziabile?

Risoluzione *motivata:* La funzione f è ovviamente continua e differenziabile per ogni $(x,y) \neq (0,0)$. Bisogna pertanto solo studiare continuità e differenziabilità nell'origine. Utilizzando coordinate polari si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} \alpha \frac{\log(1+\rho^2)}{\rho^2} + \rho^{4\alpha-2} = \begin{cases} \alpha & \alpha > 1/2, \\ 3/2 & \alpha = 1/2, \\ \infty & \alpha < 1/2. \end{cases}$$

Affinché f sia continua tale limite deve essere uguale a $f(0,0) = \alpha^2$. Se $\alpha \leq 1/2$ questo chiaramente non è verificato. Dunque deve essere $\alpha > 1/2$ e $\alpha = \alpha^2$, da cui si ottiene che l'unico valore di α per cui la funzione è continua è $\alpha = 1$. Bisogna dunque studiare la differenziabilità nell'origine di

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determiniamo le derivate parziali nell'origine studiando il limite del rapporto incrementale:

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t^2) + t^4 - t^2}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4/2 + o(t^4)}{t^3} = 0,$$

avendo usato lo sviluppo di MacLaurin $\log(1+t^2) = t^2 - t^4/2 + o(t^4)$. Analogamente $f_y(0,0) = 0$. Allo scopo di verificare la differenziabilità di f ricorriamo allora alla definizione:

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2 - x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\log(1+\rho^2) + \rho^4 - \rho^2}{\rho^3} = 0 \end{aligned}$$

(il limite in coordinate polari è lo stesso già fatto per il calcolo delle derivate parziali), e dunque f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 3. Determinare i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - xy.$$

Risoluzione *<u>motivata</u>:* I punti critici di f si ottengono imponendo l'annullarsi delle derivate parziali:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 - y = 0, \\ f_y(x, y) = -3y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Riscrivendo allora la prima equazione come $y = 3x^2$ e sostituendo nella seconda si ottiene l'equazione

$$-27x^4 - x = -x(27x^3 + 1) = 0,$$

che ha le soluzioni $x = 0$ e $x = -1/3$. Si ottengono pertanto i due punti critici:

$$P_0 = (0, 0), \qquad P_1 = (-1/3, 1/3).$$

L'hessiano della funzione è:

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & -6y \end{pmatrix},$$

e pertanto

$$\det D^2 f(P_0) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0 \quad \Rightarrow P_0 \text{ sella},$$

$$\det D^2 f(P_1) = \det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 3 > 0, -2 < 0 \quad \Rightarrow P_1 \text{ massimo relativo}.$$

Esercizio 4. Data la curva parametrica

$$\gamma(t) := (t, \log(1-t^2)), \qquad t \in [-1/2, 1/2],$$

dire se è semplice, se è chiusa, se è rettificabile e, in caso affermativo, calcolarne la lunghezza.

Risoluzione *motivata:* La curva è semplice in quanto

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow (t_1, \log(1-t_1^2) = (t_2, \log(1-t_2^2)) \Rightarrow t_1 = t_2,$$

e quindi γ è iniettiva. Inoltre γ non è chiusa poiché

$$\gamma(-1/2) = (-1/2, \log 3/4) \neq \gamma(1/2) = (1/2, \log 3/4).$$

Infine γ è chiaramente di classe C^1, e dunque rettificabile, e la sua lunghezza è

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{-1/2}^{1/2} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{-1/2}^{1/2} \left\| \left(1, -\frac{2t}{1-t^2}\right) \right\| dt = \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1 + \frac{4t^2}{(1-t^2)^2}} dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2}}{1-t^2} dt = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1+t^2}{1-t^2} dt = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{2}{1-t^2} - 1 \right) dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} - 1 \right) dt = \left[\log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - t \right]_{-1/2}^{1/2} = \log 9 - 1. \end{aligned}$$