Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 1a. Calcolare il massimo comun divisore tra 12 e 8.

Risposta: 4.

Esercizio 1b. Sia $X := \{3n^2 - 1 : n \in \mathbb{N} \cap (-1, 5)\}$. Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di X .

Risposta:

$$\inf X = 2 \text{ (o } \inf X = -1 \text{ se } 0 \in \mathbb{N}), \sup X = 47.$$

Esercizio 1c. Sia

$$f(x) = \int_0^{3x} \frac{e^{t^2}}{2+t^2} dt.$$

Calcolare $f''(1)$.

Risultato:

$$f''(1) = \frac{540}{121} e^9.$$

Esercizio 1d. Calcolare

$$\int_1^2 x^2 \log 3x dx.$$

Risultato:

$$\int_1^2 x^2 \log 3x dx = \frac{8}{3} \log 6 - \frac{1}{3} \log 3 - \frac{7}{9}.$$

(Attenzione, non verranno tollerati errori di segno, "minori stretti" confusi con "minori o uguali", eccetera.)

Esercizio 2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{2 + \arctan(\alpha - 1)x}{(x - \sqrt{x})^\alpha(x + 1)} dx$$

e calcolarlo per $\alpha = 1$.

Risoluzione motivata:

Si hanno gli andamenti asintotici, per $x \rightarrow +\infty$:

$$\frac{2 + \arctan(\alpha - 1)x}{(x - \sqrt{x})^\alpha(x + 1)} \sim \begin{cases} \frac{2+\pi/2}{x^{\alpha+1}}, & \alpha > 1, \\ \frac{2}{x^{\alpha+1}}, & \alpha = 1, \\ \frac{2-\pi/2}{x^{\alpha+1}}, & \alpha < 1, \end{cases}$$

e dunque l'integrale converge se e solo se $\alpha > 0$. Per $\alpha = 1$ bisogna calcolare

$$I := \int_2^{+\infty} \frac{2}{(x - \sqrt{x})(x + 1)} dx = 4 \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{(t - 1)(t^2 + 1)} dt,$$

dove si è effettuata la sostituzione $\sqrt{x} = t$ (che comporta $dx = 2t dt$). Si vede facilmente che l'ultimo integrando si scompone in frazioni semplici come

$$\frac{t}{(t - 1)(t^2 + 1)} = \frac{1}{2(t - 1)} - \frac{t + 1}{2(t^2 + 1)},$$

e pertanto

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 4 \int_{\sqrt{2}}^{\omega} \left[\frac{1}{2(t - 1)} - \frac{t + 1}{2(t^2 + 1)} \right] dt \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 4 \left[\frac{1}{2} \log |t - 1| - \frac{1}{2} \arctan t \right]_{\sqrt{2}}^{\omega} - \int_{\sqrt{2}}^{\omega} \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[\log \frac{(t - 1)^2}{t^2 + 1} - 2 \arctan t \right]_{\sqrt{2}}^{\omega} \\ &= -\pi - \log \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{3} + 2 \arctan \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{e^{-[\alpha(x-n)]^2}}{(\alpha^2 - 1)\sqrt{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

è uniformemente convergente in $\mathbb{R}$.

Risoluzione motivata:

Per $\alpha^2 = 1$ si ha $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ e dunque $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Tale limite non è però uniforme in quanto

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} e^{-(x-n)^2} = \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-t^2} = 1 \not\rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Per $\alpha^2 \neq 1$ si ha invece la maggiorazione uniforme

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{|(\alpha^2 - 1)\sqrt{n+1}|} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e il secondo membro converge a 0 per $n \rightarrow +\infty$, e dunque $f_n \rightarrow 0$ uniformemente in $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha \neq \pm 1$.

Esercizio 4. Sia

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{\sin(2t+1)} dt.$$

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x),$$

con a e b rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore dell'insieme di definizione di f .

Risoluzione motivata:

L'insieme di definizione D di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che l'integrale a secondo membro è finito o convergente (come integrale improprio). La funzione integranda

$$g(t) = \frac{e^{-t^2}}{\sin(2t+1)}$$

non è continua (e nemmeno definita) per $t = t_k := (k\pi - 1)/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto f sarà sicuramente definita nell'intervallo $I = \left(-\sqrt{\frac{\pi-1}{2}}, +\sqrt{\frac{\pi-1}{2}}\right)$, poiché se $x \in I$ allora per ogni t nell'intervallo di integrazione si ha

$$-\frac{1}{2} = t_0 < 0 \leq t \leq x^2 < \frac{\pi-1}{2} = t_1$$

e dunque nell'intervallo di integrazione non cade nessuna singolarità di g . Per capire se I è un sottoinsieme proprio o meno di D , bisogna studiare quindi la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\frac{\pi-1}{2}} \frac{e^{-t^2}}{\sin(2t+1)} dt.$$

A tale scopo, osserviamo che per $0 \leq t < \frac{\pi-1}{2}$ si ha $g(t) > 0$ e che

$$\sin(2t+1) = \sin\left[2\left(t - \frac{\pi-1}{2}\right) + \pi\right] = -\sin\left[2\left(t - \frac{\pi-1}{2}\right)\right] \sim -2\left(t - \frac{\pi-1}{2}\right)$$

per $t \rightarrow \frac{\pi-1}{2}$, da cui

$$g(t) \sim \frac{c}{\frac{\pi-1}{2} - t}.$$

Si conclude quindi che l'integrale improprio di sopra non è convergente, e quindi che $D = I$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{\frac{\pi-1}{2}}} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\sqrt{\frac{\pi-1}{2}}} f(x) = \int_0^{\frac{\pi-1}{2}} \frac{e^{-t^2}}{\sin(2t+1)} dt = +\infty.$$