Test di Calcolo mod. 2 – 8/6/2012
Corso di Laurea in Scienza e Tecnologia dei Media
A.A. 2011/2012

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 1a. Calcolare $\inf\{n - 3n^2 \,:\, n \in \mathbb{N} \cap [-1, 6)\}$.

Risposta: -70

Esercizio 1b. Calcolare l'area del triangolo di vertici $A = (1, 4)$, $B = (-3, 1)$, $C = (1, -2)$.

Risposta: 12

Esercizio 1c. Scrivere l'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 2y^2 \le 1, 0 \le x \le y\}$$

sotto forma di insieme normale rispetto ad uno dei due assi.

Risultato:

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0, 1/\sqrt{3}],\, x \le y \le \sqrt{\frac{1 - x^2}{2}}\right\}$$

oppure

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \in [0, 1/\sqrt{2}],\, 0 \le x \le g(y)\} \quad \text{con } g(y) = \begin{cases} y, & y \in [0, 1/\sqrt{3}], \\ \sqrt{1 - 2y^2} & y \in (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{2}] \end{cases}$$

Esercizio 1d. Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare la curva di equazione $x = e^{-z}$, $z \in [0, 1]$, contenuta nel piano (x, z), attorno all'asse z.

Risultato:

$$\frac{\pi}{2}(1 - e^{-2})$$

(Attenzione, non verranno tollerati errori di segno, "minori stretti" confusi con "minori o uguali", eccetera.)

Esercizio 2. Determinare il baricentro del triangolo T di vertici $(0,0)$, $(0,p)$ e $(q,0)$, con $p,q>0$.

Risoluzione *__motivata__:* Il baricentro di T è il punto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ definito da

$$x_0=\frac{1}{|T|}\iint_T x\,dxdy,\qquad y_0=\frac{1}{|T|}\iint_T y\,dxdy.$$

La retta che unisce i punti $(0,p)$ e $(q,0)$ ha equazione $y=\frac{p}{q}(q-x)$ e dunque T si può scrivere come insieme normale rispetto all'asse x:

$$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x\in[0,q],\,0\le y\le\frac{p}{q}(q-x)\right\}.$$

Ne segue:

$$|T|=\iint_T dxdy=\int_0^q dx\int_0^{p/q(q-x)}dy=\frac{p}{q}\int_0^q(q-x)\,dx=\frac{p}{q}\left(q^2-\frac{q^2}{2}\right)=\frac{pq}{2}$$

(come ovvio), e

$$\iint_T x\,dxdy=\int_0^q x\,dx\int_0^{p/q(q-x)}dy=\frac{p}{q}\int_0^q x(q-x)\,dx=\frac{p}{q}\left[\frac{qx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=q}=\frac{pq^2}{6},$$

$$\iint_T y\,dxdy=\int_0^q dx\int_0^{p/q(q-x)}y\,dy=\frac{p^2}{2q^2}\int_0^q(q-x)^2\,dx=-\frac{p^2}{2q^2}\left[\frac{(q-x)^3}{3}\right]_{x=0}^{x=q}=\frac{p^2q}{6},$$

e dunque $(x_0,y_0)=(q/3,p/3)$ (che coincide con il baricentro dei tre vertici di T, ma dimostrarlo non è ovvio).

Esercizio 3. Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{y}{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

dove $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,(x+1)^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$.

Risoluzione *motivata:* L'insieme Ω è la semicirconferenza di centro $(-1,0)$ e raggio 1 contenuta nel semipiano superiore. Utilizzando coordinate polari centrate nell'origine $(x,y)=\Psi(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$, $(\rho,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]$, tale dominio si trasforma in

$$\Psi^{-1}(\Omega)=\{(\rho,\theta)\,:\,\rho^2+2\rho\cos\theta\le 0,\ \sin\theta\ge 0\}.$$

La limitazione $\sin\theta\ge 0$ impone $\theta\in[0,\pi]$, mentre la limitazione $\rho^2+2\rho\cos\theta=\rho(\rho+2\cos\theta)\le 0$ equivale a $0\le\rho\le -2\cos\theta$ che implica $\theta\in[\pi/2,\pi]$. Dunque

$$\Phi^{-1}(\Omega)=\{(\rho,\theta)\,:\,\theta\in[\pi/2,\pi],\ 0\le\rho\le -2\cos\theta\},$$

è un dominio normale rispetto all'asse θ. Ne segue

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \frac{y}{1+x^2+y^2}\,dxdy &= \int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{-2\cos\theta}\frac{\rho^2}{1+\rho^2}d\rho=\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{-2\cos\theta}\left(1-\frac{1}{1+\rho^2}\right)d\rho\\ &=\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\,d\theta[\rho-\arctan\rho]_{\rho=0}^{\rho=-2\cos\theta}=\int_{\pi/2}^{\pi}d(\cos\theta)[2\cos\theta-\arctan(2\cos\theta)].\end{aligned}$$

Si ha poi, integrando per parti,

$$\int dt\arctan(2t)=t\arctan(2t)-\int\frac{2t}{1+4t^2}dt=t\arctan(2t)-\frac{1}{4}\log(1+4t^2)+c,$$

e pertanto

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \frac{y}{1+x^2+y^2}\,dxdy &= \int_{\pi/2}^{\pi}d(\cos\theta)[2\cos\theta-\arctan(2\cos\theta)]\\ &=\left[\cos^2\theta-\cos\theta\arctan(2\cos\theta)-\frac{1}{4}\log(1+4\cos^2\theta)\right]_{\pi/2}^{\pi}=1-\arctan 2-\frac{1}{4}\log 5.\end{aligned}$$

Esercizio 4. Calcolare l'integrale

$$\iiint_{\Omega} e^z(x^2+y^2)\,dxdydz,$$

dove Ω è il dominio di $\mathbb{R}^3$ compreso tra il cilindro di equazione $x^2+y^2=\pi^2$, il cono di equazione $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e il piano di equazione $z=0$.

Risoluzione *motivata:* Il dominio di integrazione si può scrivere

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2\le\pi^2, 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\}.$$

Per calcolare l'integrale, conviene utilizzare coordinate cilindriche $(x,y,z)=\Psi(\rho,\theta,z)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)$, $(\rho,\theta,z)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}$, nelle quali il dominio diventa

$$\Psi^{-1}(\Omega)=\{(\rho,\theta,z)\,:\,\rho\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi]\,,0\le z\le\rho\},$$

ed è dunque normale rispetto al piano (ρ,θ). Si ha quindi

$$\iiint_{\Omega} e^z(x^2+y^2)\,dxdydz=\iiint_{\Psi^{-1}(\Omega)} e^z\rho^3\,d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\rho^3 d\rho\int_0^{\rho}e^z\,dz=2\pi\int_0^{\pi}\rho^3(e^{\rho}-1)\,d\rho.$$

Integrando ripetutamente per parti si ottiene

$$\int\rho^3e^{\rho}d\rho=\rho^3e^{\rho}-3\int\rho^2e^{\rho}\,d\rho=(\rho^3-3\rho^2)e^{\rho}+6\int\rho e^{\rho}\,d\rho=(\rho^3-3\rho^2+6\rho-6)e^{\rho}+c,$$

e quindi

$$\iiint_{\Omega} e^z(x^2+y^2)\,dxdydz=2\pi\left[(\rho^3-3\rho^2+6\rho-6)e^{\rho}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\pi}=(2\pi^4-6\pi^3+12\pi^2-12\pi)e^{\pi}+12\pi-\frac{\pi^5}{2}.$$