Esame scritto di Calcolo mod. 2 – 20/6/2012
Corso di Laurea in Scienza e Tecnologia dei Media
A.A. 2011/2012

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):...

Esercizio 1a. Sia $X = \{n^2 + 3n \,:\, n \in \mathbb{N} \cap [2, 6]\}$. Calcolare $\inf X$ e $\sup X$.

Risposta: $\inf X = 10$, $\sup X = 54$

Esercizio 1b. Sia

$$f(x) = \int_x^0 \cos t\, e^{-t^2}\, dt.$$

Calcolare $f''(1)$.

Risposta:

$$f''(1) = \frac{\sin 1 + 2\cos 1}{e}$$

Esercizio 1c. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{e^{\alpha x^2 - 1}}{x^{\alpha+3}(2 + \cos^2(\alpha x + 1))} dx.$$

Risultato:

$$\alpha \le 0$$

Esercizio 1d. Scrivere, se esiste, l'equazione del piano tangente alla superficie elementare Σ di parametrizzazione

$$\sigma(u, v) = (2u^2 v, u + v^3, v \sin u), \qquad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1],$$

nel punto $\sigma(\pi/2, 0)$.

Risultato:

$$x - \frac{\pi^2}{2} z = 0$$

oppure, in forma parametrica,

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi^2}{2}\mu \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

(Attenzione, non verranno tollerati errori di segno, "minori stretti" confusi con "minori o uguali", eccetera.)

Esercizio 2. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni:

$$f_n(x) = x^2 + \frac{n^2 + \cos(x/n^3) - 1}{n + e^{n^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione *motivata:* Si ha chiaramente, per $x \in \mathbb{R}$ fissato,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + \cos(x/n^3) - 1}{n + e^{n^2}} = 0,$$

in quanto $\cos(x/n^3)$ è una quantità limitata e e^{n^2} è un infinito di ordine superiore rispetto a n^2. Ne segue che la successione (f_n) converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = x^2$. Inoltre

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n^2 + \cos(x/n^3) - 1}{n + e^{n^2}} \right| \leq \frac{n+2}{n + e^{n^2}} \to 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

e quindi la convergenza è anche uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + \sin^\alpha(x^4y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha^2 - 1, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

risulta continua.

Risoluzione *motivata:* Affinché f risulti continua, α deve essere tale che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + \sin^\alpha(x^4y^2)}{x^2+y^2} = \alpha^2 - 1.$$

Si ha, usando il fatto che $\sin t \sim t$ per $t \to 0$, e che $x^4y^2 \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + \sin^\alpha(x^4y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^4y^2)^\alpha}{x^2+y^2}.$$

Per il primo limite si ha, passando in coordinate polari,

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \rho|\cos^2\theta \sin\theta| \le \rho \to 0, \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Per quanto riguarda il secondo limite, sempre usando coordinate polari, si ottiene

$$\left|\frac{(x^4y^2)^\alpha}{x^2+y^2}\right| = \rho^{6\alpha-2}|\cos^4\theta \sin^2\theta| \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^4y^2)^\alpha}{x^2+y^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1/3, \\ \nexists & \text{se } \alpha = 1/3, \\ \infty & \text{se } \alpha < 1/3. \end{cases}$$

In definitiva,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + \sin^\alpha(x^4y^2)}{x^2+y^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1/3, \\ \nexists & \text{se } \alpha = 1/3, \\ \infty & \text{se } \alpha < 1/3, \end{cases}$$

e dunque α deve soddisfare le condizioni $\alpha^2 - 1 = 0$ e $\alpha > 1/3$, da cui $\alpha = 1$.

Esercizio 4. Studiare la natura dei punti critici della funzione

$$f(x,y) = (y - x^2)(y + x^2 - 1).$$

Risoluzione <u>*motivata*</u>*:* La funzione data si può riscrivere come

$$f(x,y) = y^2 - y - x^4 + x^2.$$

I punti critici si ottengono pertanto risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -4x^3 + x^2 = -2x(2x^2 - 1) = 0, \\ f_y(x,y) = 2y - 1 = 0, \end{cases}$$

che ha le tre soluzioni

$$P_1 = (0, 1/2), \quad P_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/2), \quad P_3 = (1/\sqrt{2}, 1/2).$$

L'hessiano della funzione è

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 + 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e la natura dei punti critici si ottiene pertanto al modo seguente:

$$\det D^2 f(\pm 1/\sqrt{2}, 1/2) = \det \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -8 < 0 \implies P_2, P_3 \text{ punti di sella,}$$

$$\det D^2 f(0, 1/2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0, 2 > 0 \implies P_1 \text{ punto di min. rel.}$$

Alternativamente, lo studio della natura dei punti critici poteva essere effettuato anche in maniera grafica, studiano il segno della funzione f.

Esercizio 5. Calcolare l'integrale
$$\iint_\Omega \frac{y}{1+x^2}\,dxdy,$$
dove $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+\frac{y^2}{2}\le 1,\, x\ge 0,\, 0\le y\le 2x\}$.

Risoluzione *motivata:* Conviene rappresentare il dominio Ω come dominio normale rispetto all'asse x. A tale scopo, è necessario determinare l'ascissa del punto di intersezione tra la retta di equazione $y=2x$ e l'ellisse di equazione $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ contenuto nel primo quadrante, che risulta essere $x=1/\sqrt{3}$. Si ha pertanto
$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x\in[0,1],\, 0\le y\le g(x)\},\ \text{con } g(x)=\begin{cases} 2x & \text{se } x\in[0,1/\sqrt{3}],\\ \sqrt{2(1-x^2)} & \text{se } x\in(1/\sqrt{3},1].\end{cases}$$
L'integrale dato si calcola allora come segue:
$$\iint_\Omega \frac{y}{1+x^2}\,dxdy = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\int_0^{g(x)} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{g(x)^2}{1+x^2}dx = 2\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}dx + \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}dx.$$
Per i due integrali all'ultimo membro dell'equazione si ha poi:
$$\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^{1/\sqrt{3}} \left[1-\frac{1}{1+x^2}\right]\,dx = [x-\arctan x]_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6},$$
$$\int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}dx = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \left[\frac{2}{1+x^2}-1\right]\,dx = [2\arctan x - x]_{1/\sqrt{3}}^1 = \frac{\pi}{2}-1-\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}},$$
e di conseguenza
$$\iint_\Omega \frac{y}{1+x^2}\,dxdy = \sqrt{3}-\frac{\pi}{6}-1.$$