Esame scritto di Calcolo mod. 2 – 5/9/2012
Corso di Laurea in Scienza e Tecnologia dei Media
A.A. 2011/2012

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 1a. Calcolare il massimo comun divisore tra 12 e 30.

Risposta: 6

Esercizio 1b. Determinare perimetro e area del triangolo di vertici $(-3,1)$, $(1,1)$, $(-1,-2)$.

Risposta: $p = 4 + 2\sqrt{13}$, $a = 6$.

Esercizio 1c. Calcolare

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2y + \frac{\sin(2xy^3)}{1+x}}.$$

Risultato:

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2y+\frac{\sin(2xy^3)}{1+x}}}\left(2xy + \frac{2y^3(1+x)\cos(2xy^3) - \sin(2xy^3)}{(1+x)^2}\right).$$

Esercizio 1d. Scrivere, se possibile, l'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1,\, x \geq y^2\}$$

come insieme normale rispetto a uno dei due assi coordinati.

Risultato:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2},\, y^2 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\right\}.$$

(Attenzione, non verranno tollerati errori di segno, "minori stretti" confusi con "minori o uguali", eccetera.)

Esercizio 2. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\alpha x) - \alpha x}{\sqrt{x^\alpha}(2 + \log(1 + e^{3x^\alpha}))} dx.$$

Risoluzione <u>*motivata*</u>*:* Osserviamo per cominciare che, detta f la funzione integranda, per $\alpha = 0$ si ha $f = 0$, che è quindi integrabile. Per $\alpha \neq 0$ dobbiamo studiare l'andamento asintotico di f sia per $x \to 0$ che per $x \to \infty$.

Cominciamo dall'andamento per $x \to 0$, distinguendo i casi $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$. Per $\alpha > 0$, ricordando che $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^4)$, si ha

$$f(x) \sim \frac{\frac{\alpha^3 x^3}{3}}{x^{\alpha/2}(2 + \log 2)} = \frac{\alpha^3}{3(2 + \log 2)} \frac{1}{x^{\alpha/2 - 3}} \qquad \text{per } x \to 0$$

per cui la funzione data sarà integrabile, in un intorno di $x = 0$, per $0 < \alpha < 8$. Per $\alpha < 0$ si ha invece $e^{3x^\alpha} \to +\infty$ per $x \to 0$, e dunque $\log(1 + e^{3x^\alpha}) \sim 3x^\alpha$, da cui

$$f(x) \sim \frac{\frac{\alpha^3 x^3}{3}}{x^{\alpha/2}(3x^\alpha)} = \frac{\alpha^3}{9} x^{3 - 3\alpha/2} \to 0 \qquad \text{per } x \to 0$$

e quindi f è integrabile, in un intorno di $x = 0$, per ogni $\alpha < 0$. In definitiva, f è integrabile, in un intorno di $x = 0$, per ogni $\alpha < 8$.

Consideriamo ora l'andamento asintotico per $x \to +\infty$. Per $\alpha > 0$ si ha ancora $\log(1 + e^{3x^\alpha}) \sim 3x^\alpha$ e quindi

$$f(x) \sim -\frac{\alpha x}{x^{\alpha/2}(3x^\alpha)} = -\frac{\alpha}{3} \frac{1}{x^{3/2\alpha - 1}} \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

e pertanto la funzione data sarà integrabile, per $x \to +\infty$, per $\alpha > 4/3$. Infine per $\alpha < 0$ si avrà

$$f(x) \sim -\frac{\alpha x}{x^{\alpha/2}(2 + \log 2)} = -\frac{\alpha}{2 + \log 2} x^{1 - \alpha/2} \to +\infty \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

e quindi f non è integrabile per $x \to +\infty$ se $\alpha < 0$.

In conclusione, l'integrale dato è convergente per $4/3 < \alpha < 8$.

Esercizio 3. Studiare continuità, derivabilità parziale e differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4 - \cos y + 1}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione *motivata:* Continuità. Osservando che dal limite notevole $\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = 1/2$ segue, per $|y|$ sufficientemente piccolo,

$$1 - \cos y \geq \frac{1}{4} y^2 \geq 0,$$

si hanno le diseguaglianze

$$\left| \frac{xy^2}{x^4 - \cos y + 1} \right| = \frac{|x|y^2}{x^4 + (1 - \cos y)} \leq \frac{|x|y^2}{x^4 + y^2/4} \leq \frac{4|x|(y^2/4 + x^4)}{x^4 + y^2/4} = 4|x|,$$

da cui segue la continuità della funzione data in $(0,0)$.
Derivabilità parziale. Si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0,$$

e pertanto $\exists f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$.
Differenziabilità. Bisogna verificare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^4 - \cos y + 1)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Considerando rette passanti per l'origine $y = mx$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{m^2x^3}{(x^4 + 1 - \cos(mx))\sqrt{x^2 + m^2x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{m^2x^3}{x^3\left(x^2 + \frac{1-\cos(mx)}{x^2}\right)\sqrt{1+m^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+m^2}},$$

pertanto il limite considerato non esiste e la funzione data non è differenziabile nell'origine.

Esercizio 4. Siano

$$\alpha(t) = \int_0^t (\sin s)\, e^{-s^2/2}\, ds$$

e

$$\beta(t) = \int_0^t (\cos s)\, e^{-s^2/2}\, ds.$$

Considerare la curva $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ data da

$$\gamma(t) \;=\; \big(\alpha(t),\, \beta(t)\big).$$

Dire se γ ha lunghezza finita e, se possibile, determinarla.

Risoluzione _motivata:_ Si ha

$$\|\gamma'(t)\| = \|(\alpha'(t), \beta'(t))\| = \|(\sin t\, e^{-t^2/2}, \cos t\, e^{-t^2/2})\| = \sqrt{\sin^2 t\, e^{-t^2} + \cos^2 t\, e^{-t^2}} = e^{-t^2/2},$$

e poiché la funzione $t \mapsto e^{-t^2/2}$ è integrabile su tutto $\mathbb{R}$, la curva γ ha lunghezza finita, che vale

$$L(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}.$$

Esercizio 5. Sia Σ la superficie costituita dalla porzione di ellissoide di equazione

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

contenuta all'interno del cono di equazione

$$z = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Determinare l'area di Σ.

Risoluzione motivata: Una parametrizzazione cartesiana di Σ è data da

$$\sigma(u, v) = (u, v, 2\sqrt{1 - u^2 - v^2}), \qquad (u, v) \in D,$$

dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è determinato dalla condizione che il punto $\sigma(u, v)$ sia all'interno del cono, cioè che la sue coordinate soddisfino $z \geq 2/\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$, e pertanto

$$D = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2\sqrt{1 - u^2 - v^2} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{u^2 + v^2}\right\} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u^2 + v^2 \leq 3/4\}.$$

Ricordando allora la formula per la lunghezza del vettore normale a una superficie cartesiana

$$\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = \sqrt{1 + z_u(u, v)^2 + z_v(u, v)^2} = \sqrt{\frac{1 + 3(u^2 + v^2)}{1 - (u^2 + v^2)}},$$

si ha che l'area di Σ è data da

$$A(\Sigma) = \iint_D \sqrt{\frac{1 + 3(u^2 + v^2)}{1 - (u^2 + v^2)}}\, dudv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}/2} d\rho\, \rho \sqrt{\frac{1 + 3\rho^2}{1 - \rho^2}} = \pi \int_0^{3/4} dt\, \sqrt{\frac{1 + 3t}{1 - t}},$$

dove nell'ultimo passaggio si è effettuato il cambiamento di variabile $t = \rho^2$. L'ultimo integrale si può razionalizzare effettuando la sostituzione

$$s = \sqrt{\frac{1 + 3t}{1 - t}} \Leftrightarrow t = \frac{s^2 - 1}{3 + s^2}, \qquad dt = \frac{8s}{(3 + s^2)^2} ds,$$

da cui si ottiene

$$A(\Sigma) = 8\pi \int_1^{\sqrt{13}} \frac{s^2}{(3 + s^2)^2} ds.$$

La primitiva della funzione nell'ultimo integrale si può calcolare facilmente osservando che, integrando per parti,

$$\int \frac{ds}{3 + s^2} = \frac{s}{3 + s^2} + 2\int \frac{s^2}{(3 + s^2)^2} ds,$$

da cui

$$A(\Sigma) = 4\pi \left[-\frac{s}{3 + s^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{s}{\sqrt{3}}\right]_1^{\sqrt{13}} = 4\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{\frac{13}{3}} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{16} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right).$$