Tutorato del corso di Analisi III
a.a. 2011-12

26/10/2011

1. Utilizzando opportuni cambiamenti di variabili, cacolare gli integrali doppi seguenti, sui domini indicati.

   (a) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$ $\qquad D=\{(x,y)\,:\,x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq a^2\};$

   (b) $\iint_D x\,dxdy,$ $\qquad D=\{(x,y)\,:\,1\leq x^2+y^2\leq 2, x\leq -|y|\};$

   (c) $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy,$ $\qquad D=\{(x,y)\,:\,y\geq 0, x^2+y^2\leq a^2\};$

   (d) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$ $\qquad D=\{(x,y)\,:\,(x-a)^2+y^2\leq a^2\};$

   (e) $\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2},$ $\qquad D=$ trapezio di vertici $(1,0),(3,0),(3,3),(1,1);$

   (f) $\iint_D e^{x^2+y^2-\arctan y/x}\,dxdy,$ $\qquad D=\{(x,y)\,:\,x\geq 0, y\geq 0, 1\leq x^2+y^2\leq 2\};$

   (g) $\iint_D (x-y)\log(x+y)\,dxdy,$ $\qquad D=\{(x,y)\,:\,x-1\leq y\leq x, 1-x\leq y\leq 3-x\};$

   (h) $\iint_D \frac{e^{x+y}}{(2x+y-1)^2}\,dxdy,$ $\qquad D=\{(x,y)\,:\,0\leq x+y-2\leq 1, -2\leq 2x+y\leq 0\};$

   (i) $\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right)\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]\frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,$ $\qquad D=\{(x,y)\,:\,0\leq y\leq x, 1/4\leq x^2+y^2\leq 1\};$

   (l) $\iint_D e^x|xy-1-y|\frac{e^{2x}y^2}{x^2(1+y)^2}\,dxdy,$ $\qquad D=\{(x,y)\,:\,1\leq ye^x\leq 2, 2\leq xy+x\leq 3\};$

   [*Soluzioni*: (a) $\frac{\pi}{6}a^3$; (b) $-\frac{1}{3}(4-\sqrt{2})$; (c) $\frac{\pi}{3}a^3$; (d) $\frac{32}{9}a^3$; (e) $\frac{\pi}{4}\log 3$; (f) $\frac{1}{2}(1-e^{-\pi/2})(e^2-e)$; (g) $\frac{1}{4}(3\log 3-2)$; (h) $\frac{2}{3}(e^3-e^2)$; (i) $-\frac{1}{2}(1-\cos 1)(2+\log 1/2)$; (l) 7/18.]

2. Sia $D\subset\mathbb{R}^2$ unione finita di domini normali a due a due privi di punti interni in comune. Il *baricentro (geometrico)* di D è il punto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ definito da

   $$x_0:=\frac{1}{m(D)}\iint_D x\,dxdy,\qquad y_0:=\frac{1}{m(D)}\iint_D y\,dxdy.$$

   Determinare il baricentro degli insiemi seguenti:

   (a) $D=\{(x,y)\,:\,y\geq 0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\};$

   (b) $D=$ triangolo di veritici $(0,0)$, $(p,0)$ e $(0,q)$, con $p,q>0$. Si verifichi inoltre che il baricentro coincide con il punto di intersezione delle mediane del triangolo.

   [*Soluzioni*: (a) $(0,\frac{4b}{3\pi})$; (b) $(p/3,q/3)$.]