

Roma, 23 novembre 2011

Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile (limitato). Una proprietà P che dipende dal generico punto $x \in X$ si dice valida (PJ-) *quasi ovunque in X* se esiste un insieme misurabile $N \subset X$ tale che $m(N) = 0$ e tale che $P(x)$ sia valida per ogni $x \in X \setminus N$.

Teorema 1. *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ un compatto misurabile, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e continua quasi ovunque in X . Allora f è integrabile in X .*

Dimostrazione. Sia $N \subset X$ tale che $m(N) = 0$ e tale che $f \in C^0(X \setminus N)$. Dato $\varepsilon > 0$, si può trovare allora un plurintervallo $Q \supset N$ tale che $m(Q) < \varepsilon$, e allargando un po', se occorre, Q , si può anche assumere che $N \subset \overset{\circ}{Q}$. Poiché allora $X \setminus \overset{\circ}{Q}$ è compatto ed f è continua su tale insieme, si potrà trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x, y \in X \setminus \overset{\circ}{Q}, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dato allora $\sigma > 0$, $\sigma < \delta/\sqrt{n}$, si consideri la partizione P di X definita da

$$P = \{Q_k(\sigma) \cap (X \setminus \overset{\circ}{Q}) : k \in \mathbb{Z}^n\} \cup \{\overset{\circ}{Q}\},$$

dove ricordiamo che $Q_k(\sigma) = \times_{i=1}^n [\sigma k_i, \sigma(k_i + 1))$. Che P sia effettivamente una partizione di X si verifica facilmente ricordando che $Q_k(\sigma) \cap Q_h(\sigma) = \emptyset$ se $h \neq k$, $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} Q_k(\sigma) = \mathbb{R}^n$, e osservando che, per la limitatezza di $X \setminus \overset{\circ}{Q}$, solo un numero finito degli insiemi $Q_k(\sigma) \cap (X \setminus \overset{\circ}{Q})$ è non vuoto. Poiché allora $\text{diam } \overline{Q_k(\sigma)} = \sigma\sqrt{n} < \delta$, si avrà

$$\sup_{Q_k(\sigma) \cap (X \setminus \overset{\circ}{Q})} f - \inf_{Q_k(\sigma) \cap (X \setminus \overset{\circ}{Q})} f \leq \frac{\max_{Q_k(\sigma) \cap (X \setminus \overset{\circ}{Q})} f - \min_{Q_k(\sigma) \cap (X \setminus \overset{\circ}{Q})} f}{1} < \varepsilon.$$

Inoltre se $M := \sup_X |f| < \infty$, si avrà anche

$$-M \leq \inf_{\overset{\circ}{Q}} f \leq \sup_{\overset{\circ}{Q}} f \leq M,$$

e cioè $\sup_{\overset{\circ}{Q}} f - \inf_{\overset{\circ}{Q}} f \leq 2M$. In base a tali disuguaglianze, si otterrà allora

$$\begin{aligned} S(P) - s(P) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sup_{Q_k(\sigma) \cap (X \setminus \overset{\circ}{Q})} f - \inf_{Q_k(\sigma) \cap (X \setminus \overset{\circ}{Q})} f \right) m(Q_k(\sigma) \cap (X \setminus \overset{\circ}{Q})) \\ &\quad + \left(\sup_{\overset{\circ}{Q}} f - \inf_{\overset{\circ}{Q}} f \right) m(\overset{\circ}{Q}) \\ &< \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} m(Q_k(\sigma) \cap (X \setminus \overset{\circ}{Q})) + 2M m(\overset{\circ}{Q}) \\ &< \varepsilon(m(X) + 2M), \end{aligned}$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε , la tesi. □

Corollario 2. *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e continua in X . Allora f è integrabile in X .*

Dimostrazione. Essendo X limitato $\bar{X}$ è compatto, ed è misurabile: se Q', Q'' sono plurintervalli tali che $Q' \subset X \subset Q''$ e $m(Q'') - m(Q') < \varepsilon$, la misurabilità di $\bar{X}$ segue applicando la prop. 1 di [FMS, par. 79] agli insiemi misurabili $\bar{Q}', \bar{Q}''$. Si consideri allora la funzione

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in X, \\ 0 & x \in \bar{X} \setminus X. \end{cases}$$

Se $x \in \overset{\circ}{\bar{X}}$, chiaramente $\bar{f}$ coincide con f in un intorno di x , ed è dunque continua in x . Essendo allora $\bar{X} \setminus \overset{\circ}{\bar{X}} = \partial X$ di misura nulla, $\bar{f}$ è continua quasi ovunque su $\bar{X}$, ed è dunque ivi integrabile per il teorema 1. Dall'additività dell'integrale segue allora che $\bar{f}$ è integrabile su X , ma su tale insieme $\bar{f} = f$. $\square$

È anche chiaro che, nel corollario precedente, l'ipotesi che f sia continua su X si può ulteriormente indebolire richiedendo solo che sia continua quasi ovunque.

Riferimenti bibliografici

[FMS] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, Liguori (1996).