Roma, 9 novembre 2011

Daremo qui un'esposizione più dettagliata della teoria della misura dei plurintervalli di $\mathbb{R}^n$ rispetto a quella svolta nel testo [FMS, par. 79].

Ricordiamo che dato un intervallo $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ($-\infty < a_i \leq b_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n$) la sua misura è, per definizione,

$$m(I) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$$

se I è non vuoto, e $m(I) = 0$ in caso contrario. Cominciamo con un lemma sulle principali proprietà degli intervalli.

Lemma 1. *Siano $J, I, I_1, \dots, I_h$ intervalli. Allora $I \cap J$ è un intervallo e $J \setminus I_1 \cdots \setminus I_h$ è unione finita di intervalli disgiunti.*

Dimostrazione. Se $I = \times_{i=1}^n [a_i, b_i]$, $J = \times_{i=1}^n [c_i, d_i]$, allora $I \cap J = \times_{i=1}^n [\max\{a_i, c_i\}, \min\{b_i, d_i\}]$ è un intervallo.

Inoltre $J \setminus I_1$ si può scrivere come unione finita di intervalli disgiunti. Infatti $x \in \mathbb{R}^n \setminus I_1$ se e solo se $x_i \in (-\infty, a_i) \cup [b_i, +\infty)$ per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$, e dunque posto, per $\alpha, \beta \subset \{1, \dots, n\}$ disgiunti e non entrambi vuoti,

$$I_{(\alpha, \beta)} := J \cap [(\times_{i \in \alpha} (-\infty, a_i)) \times (\times_{i \in \beta} [b_i, +\infty)) \times (\times_{i \notin \alpha \cup \beta} [a_i, b_i))],$$

gli $I_{(\alpha, \beta)}$ sono intervalli disgiunti (possibilmente vuoti) la cui unione è $J \cap (\mathbb{R}^n \setminus I_1) = J \setminus I_1$. Iterando il ragionamento, si vede che $J \setminus I_1 \cdots \setminus I_h$ è unione finita di intervalli disgiunti (se $J \setminus I_1 = \bigcup_{s=1}^l K_s$ con K_s intervalli disgiunti, allora $J \setminus I_1 \setminus I_2 = \bigcup_{s=1}^l (K_s \setminus I_2)$ e $K_s \setminus I_2$ è unione finita di intervalli disgiunti, e così via). $\square$

Dati $k \in \mathbb{Z}^n$, $\varepsilon > 0$, consideriamo i plurintervalli particolari

$$Q_k(\varepsilon) := [\varepsilon k_1, \varepsilon(k_1 + 1)) \times \cdots \times [\varepsilon k_n, \varepsilon(k_n + 1)),$$

detti ε -cubi di $\mathbb{R}^n$. È chiaro che $Q_k(\varepsilon) \cap Q_h(\varepsilon) = \emptyset$ se $k \neq h$ e che $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} Q_k(\varepsilon) = \mathbb{R}^n$, cioè gli ε -cubi formano una partizione di $\mathbb{R}^n$. Dato un insieme $X \subset \mathbb{R}^n$, sia $\mathcal{Q}_\varepsilon(X)$ la famiglia degli ε -cubi contenuti nell'interno di X , e $\mathcal{Q}_\varepsilon^\partial(X)$ la famiglia degli ε -cubi che hanno punti in comune con la frontiera di X . Il seguente risultato ci sarà utile a breve.

Lemma 2. *Sia $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervallo. Allora, indicando con $\#Y$ la cardinalità dell'insieme Y ,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^n \# \mathcal{Q}_\varepsilon(I) = m(I), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^n \# \mathcal{Q}_\varepsilon^\partial(I) = 0. \quad (1)$$

Dimostrazione. Se I è vuoto, allora $\# \mathcal{Q}_\varepsilon(I) = \# \mathcal{Q}_\varepsilon^\partial(I) = 0$ e non c'è nulla da dimostrare. Sia allora $I \neq \emptyset$. Chiaramente, si ha $Q_k(\varepsilon) \in \mathcal{Q}_\varepsilon(I)$ se e solo se

$$\frac{a_i}{\varepsilon} < k_i < k_i + 1 \leq \frac{b_i}{\varepsilon}, \quad i = 1, \dots, n,$$

e valendo le diseuguaglianze evidenti

$$\left\lceil \frac{b_i - a_i}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \leq \# \left\{ k_i \in \mathbb{Z} : \frac{a_i}{\varepsilon} < k_i < k_i + 1 \leq \frac{b_i}{\varepsilon} \right\} \leq \left\lceil \frac{b_i - a_i}{\varepsilon} \right\rceil,$$

dove le parentesi quadre denotano la parte intera, ne segue

$$\prod_{i=1}^n \left(\left\lceil \frac{b_i - a_i}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \leq \#Q_\varepsilon(I) \leq \prod_{i=1}^n \left\lceil \frac{b_i - a_i}{\varepsilon} \right\rceil,$$

da cui, tenendo conto del fatto che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \left\lceil \frac{x}{\varepsilon} \right\rceil = x$, $x \in \mathbb{R}$, si ottiene subito la prima delle (1).

Per dimostrare la seconda delle (1), osserviamo preliminarmente che

$$\partial I = \bigcup_{j=1}^n ([a_1, b_1] \times \cdots \times \{a_j\} \times \cdots \times [a_n, b_n]) \cup ([a_1, b_1] \times \cdots \times \{b_j\} \times \cdots \times [a_n, b_n]).$$

Si ha allora, ad esempio, $Q_k(\varepsilon) \cap [a_1, b_1] \times \cdots \times \{a_j\} \times \cdots \times [a_n, b_n] \neq \emptyset$ se e solo se

$$\frac{a_i}{\varepsilon} - 1 < k_i < k_i + 1 \leq \frac{b_i}{\varepsilon} + 1, \quad i = 1, \dots, n, i \neq j, \quad k_j \leq \frac{a_j}{\varepsilon} < k_j + 1,$$

e pertanto la cardinalità di tali ε -cubi sarà maggiorata da $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left(\left\lceil \frac{b_i - a_i}{\varepsilon} \right\rceil + 2 \right)$. Se ne deduce quindi che

$$\#Q_\varepsilon^\partial(I) \leq 2 \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left(\left\lceil \frac{b_i - a_i}{\varepsilon} \right\rceil + 2 \right),$$

da cui la formula voluta segue immediatamente. $\square$

Ricordiamo che un *plurintervallo* di $\mathbb{R}^n$ è un insieme P che sia unione di un numero finito di intervalli. Sia $\mathcal{P}$ la famiglia di tutti i plurintervalli di $\mathbb{R}^n$. Nelle due proposizioni seguenti diamo le principali proprietà dei plurintervalli.

Proposizione 3. *Siano P, P' plurintervalli. Allora $P \cup P', P \cap P'$ e $P \setminus P'$ sono plurintervalli.*

Dimostrazione. Sia $P = \bigcup_{r=1}^h I_r$, $P' = \bigcup_{s=1}^l J_s$ con gli I_r, J_s intervalli. Allora

$$P \cup P' = \left(\bigcup_{r=1}^h I_r \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^l J_s \right)$$

è un plurintervallo e

$$P \cap P' = \bigcup_{\substack{r=1, \dots, h \\ s=1, \dots, l}} (I_r \cap J_s), \quad P \setminus P' = \bigcup_{r=1}^h (I_r \setminus J_1 \cdots \setminus J_l)$$

sono plurintervalli grazie al lemma 1. $\square$

L'enunciato della proposizione 3 si esprime anche dicendo che $\mathcal{P}$ è un anello di insiemi in $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 4. *Sia P un plurintervallo. Esistono allora $I_1, \dots, I_h$ intervalli disgiunti tali che $P = \bigcup_{r=1}^h I_r$.*

Dimostrazione. Siano $J_1, \dots, J_l$ intervalli la cui unione è P . Si definisca allora

$$K_1 := J_1, K_2 := J_2 \setminus K_1, K_3 := J_3 \setminus (K_1 \cup K_2), \dots, K_l := J_l \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_{l-1}).$$

È chiaro dalla definizione che i K_s , $s = 1, \dots, l$, sono disgiunti e la loro unione è P . Se proviamo che sono unioni finite di intervalli disgiunti avremo allora ottenuto la tesi, prendendo come $\{I_1, \dots, I_h\}$ la collezione di tutti gli intervalli così ottenuti. A tal scopo, procediamo per induzione su s e supponiamo che $K_1, \dots, K_{s-1}$ siano unioni finite di intervalli disgiunti. Allora K_s è la differenza tra J_s ed una collezione finita di intervalli disgiunti (tutti quelli che costituiscono $K_1, \dots, K_{s-1}$) e quindi, per il lemma 1, si scrive come unione finita di intervalli disgiunti. $\square$

Se $P, I_1, \dots, I_h$ sono come nell'enunciato della proposizione precedente, la famiglia $\{I_1, \dots, I_h\}$ si dice una *partizione di P (in intervalli disgiunti)*.

Proposizione 5. *Sia $P = \bigcup_{r=1}^h I_r$ con I_r , $r = 1, \dots, h$, intervalli disgiunti. Allora*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^n \# \mathcal{Q}_\varepsilon(P) = \sum_{r=1}^h m(I_r). \quad (2)$$

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathcal{Q}_\varepsilon^\partial(P, I_1, \dots, I_h)$ l'insieme degli $Q_k(\varepsilon) \in \mathcal{Q}_\varepsilon(P)$ tali che $Q_k(\varepsilon) \in \mathcal{Q}_\varepsilon^\partial(I_r)$ per qualche $r = 1, \dots, h$. Poichè allora gli I_r sono disgiunti, si avrà

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(P) = \left(\bigcup_{r=1}^h \mathcal{Q}_\varepsilon(I_r) \right) \cup \mathcal{Q}_\varepsilon^\partial(P, I_1, \dots, I_h)$$

come unione disgiunta, da cui $\# \mathcal{Q}_\varepsilon(P) = \sum_{r=1}^h \# \mathcal{Q}_\varepsilon(I_r) + \# \mathcal{Q}_\varepsilon^\partial(P, I_1, \dots, I_h)$. D'altra parte chiaramente $\mathcal{Q}_\varepsilon^\partial(P, I_1, \dots, I_h) \subset \bigcup_{r=1}^h \mathcal{Q}_\varepsilon^\partial(I_r)$, il che, grazie al lemma 2, implica $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^n \# \mathcal{Q}_\varepsilon^\partial(P, I_1, \dots, I_h) = 0$. Applicando ancora il lemma 2 ne segue

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^n \# \mathcal{Q}_\varepsilon(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{r=1}^h \varepsilon^n \# \mathcal{Q}_\varepsilon(I_r) + \varepsilon^n \# \mathcal{Q}_\varepsilon^\partial(P, I_1, \dots, I_h) \right) = \sum_{r=1}^h m(I_r),$$

cioè la tesi. $\square$

In base alla proposizione appena dimostrata ha senso definire la *misura* del plurintervallo P come

$$m(P) = \sum_{r=1}^h m(I_r),$$

dove $\{I_1, \dots, I_h\}$ è una qualunque partizione di P in intervalli disgiunti. La misura così definita non dipende infatti dalla scelta della partizione, poichè non ne dipende il primo membro della (2).

Concludiamo con due risultati enunciati ma non dimostrati nel testo. Il primo di essi riguarda la misura di un prodotto cartesiano di plurintervalli ed è utilizzato nella dimostrazione di [FMS, prop. 3, par. 79]. Per non creare confusione, indichiamo con m_n , invece che semplicemente con m , la misura dei plurintervalli in $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 6. *Siano $P \subset \mathbb{R}^n, P' \subset \mathbb{R}^p$ plurintervalli. Allora $P \times P'$ è un plurintervallo in $\mathbb{R}^{n+p}$ e*

$$m_{n+p}(P \times P') = m_n(P)m_p(P').$$

Dimostrazione. Sia $\{I_1, \dots, I_h\}$ e $\{J_1, \dots, J_l\}$ partizioni di P, P' rispettivamente. È allora chiaro che $\{I_r \times J_s : r = 1, \dots, h, s = 1, \dots, l\}$ è una partizione di $P \times P'$ e pertanto

$$m_{n+p}(P \times P') = \sum_{r=1}^h \sum_{s=1}^l m_{n+p}(I_r \times J_s) = \sum_{r=1}^h \sum_{s=1}^l m_n(I_r)m_p(J_s) = m_n(P)m_p(P'),$$

che è quanto voluto. □

Il secondo risultato è la formula (79.19) del testo.

Proposizione 7. *Sia $P \subset \mathbb{R}^n$ un plurintervallo. Allora $\overset{\circ}{P}, \bar{P}$ sono misurabili (secondo Peano-Jordan) e*

$$m(\overset{\circ}{P}) = m(P) = m(\bar{P}).$$

Dimostrazione. Introduciamo dapprima delle notazioni: dati un intervallo $I = \times_{i=1}^n [a_i, b_i]$ e $\varepsilon > 0$, consideriamo gli intervalli

$$I_\varepsilon := \times_{i=1}^n [a_i + \varepsilon, b_i], \quad I^\varepsilon := \times_{i=1}^n [a_i, b_i + \varepsilon].$$

È chiaro che $I_\varepsilon \subset \overset{\circ}{I} \subset I \subset \bar{I} \subset I^\varepsilon$ e che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m(I_\varepsilon) = m(\overset{\circ}{I}) = m(I) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m(I^\varepsilon)$.

Sia ora P un plurintervallo. Poiché $\overset{\circ}{P} \subset P \subset \bar{P}$, si ha

$$\overline{m}(\overset{\circ}{P}) \leq m(P) \leq \underline{m}(\bar{P}),$$

e per ottenere la tesi basterà allora dimostrare le disuguaglianze

$$\underline{m}(\overset{\circ}{P}) \geq m(P) \geq \overline{m}(\bar{P}). \tag{3}$$

A tale scopo sia $P = \bigcup_{r=1}^h I_r$ una partizione di P . Si avrà dunque $\overset{\circ}{P} = \bigcup_{r=1}^h \overset{\circ}{I}_r$, $\bar{P} = \bigcup_{r=1}^h \bar{I}_r$, e posto allora $P_\varepsilon := \bigcup_{r=1}^h I_{r,\varepsilon}$, $P^\varepsilon := \bigcup_{r=1}^h I_r^\varepsilon$, da quanto sopra osservato si ottiene, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$P_\varepsilon \subset \overset{\circ}{P} \subset P \subset \bar{P} \subset P^\varepsilon.$$

Inoltre, essendo gli $I_{r,\varepsilon}$ una partizione di P_ε , si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m(P_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{r=1}^h m(I_{r,\varepsilon}) = \sum_{r=1}^h m(I_r) = m(P),$$

e quindi la prima delle (3). Infine, per la monotonia e la subadditività della misura dei plurintervalli, formule (79.13) e (79.14) del testo,

$$m(P) \leq m(P^\varepsilon) \leq \sum_{r=1}^h m(I_r^\varepsilon),$$

da cui, passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, si ottiene la seconda delle (3), e quindi la tesi. $\square$

Riferimenti bibliografici

[FMS] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, Liguori (1996).