Additività finita dell'integrale su un dominio normale del piano

Roma, 20 ottobre 2011

Utilizziamo le notazioni del testo [FMS]. Cominciamo con una semplice ma utile caratterizzazione dell'integrabilità di una funzione.

Lemma 1. *Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio normale. La funzione limitata $f : D \to \mathbb{R}$ è integrabile su D se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P di D tale che*

$$S(P) - s(P) < \varepsilon. \tag{1}$$

Dimostrazione. Se vale la (1) allora chiaramente f è integrabile, poiché se non lo fosse, prendendo

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\big(\inf_P S(P) - \sup_P s(P)\big)$$

si otterrebbe un assurdo.

Viceversa supponiamo f integrabile. Dato allora $\varepsilon > 0$, per le proprietà caratteristice di inf e sup si possono travovare partizioni P_1, P_2 di D tali che

$$S(P_2) - s(P_1) < \varepsilon.$$

Sia $P = P_{12}$ la partizione generata da P_1 e P_2. Da [FMS, par. 74, lemma 2] segue allora che

$$S(P_{12}) - s(P_{12}) \leq S(P_2) - s(P_1) < \varepsilon,$$

cioè la (1). □

Mostriamo ora che l'integrale di una funzione esteso ad un dominio normale che è unione di domini normali a due a due privi di punti interni in comune è dato dalla somma degli integrali estesi a tali domini. Se D è un dominio normale ed f una funzione integrabile su di esso, per brevità useremo la notazione

$$\iint_D f := \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Proposizione 2. *Siano $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio normale e $P = \{D_1, \dots, D_n\}$ una partizione di D. Una funzione limitata $f : D \to \mathbb{R}$ è integrabile su D se e solo se è integrabile su $D_1, \dots, D_n$, ed in tal caso*

$$\iint_D f = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f. \tag{2}$$

Dimostrazione. Sia f integrabile, e, dato $\varepsilon > 0$ si prenda, in base al lemma 1, una partizione $Q = \{E_1, \dots, E_m\}$ di D tale che

$$S(Q) - s(Q) < \varepsilon.$$

Sia poi $R = \{D_i \cap E_j \, : \, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ la partizione di D generata da P e Q. Sempre da [FMS, par. 74, lemma 2] segue che

$$S(R) - s(R) \leq S(Q) - s(Q) < \varepsilon.$$

D'altra parte è chiaro che $R_i := \{D_i \cap E_j \, : \, j = 1, \dots, m\}$ è una partizione di D_i, $i = 1, \dots, n$, e che $S(R) = \sum_{i=1}^n S(R_i)$, $s(R) = \sum_{i=1}^n s(R_i)$. Ne segue

$$\sum_{i=1}^n \big(S(R_i) - s(R_i)\big) = S(R) - s(R) < \varepsilon,$$

e dunque, essendo tutti gli addendi non negativi, l'integrabilità di f su D_i, $i = 1, \dots, n$. Si ha inoltre

$$s(R) \leq \iint_D f \leq S(R) \tag{3}$$

ed anche

$$s(R_i) \leq \iint_{D_i} f \leq S(R_i), \qquad i = 1, \dots, n,$$

da cui, sommando su i,

$$s(R) \leq \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f \leq S(R). \tag{4}$$

La (3) e la (4) implicano

$$\left| \iint_D f - \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f \right| \leq S(R) - s(R) < \varepsilon,$$

da cui la (2) segue per l'arbitrarietà di ε.

Viceversa supponiamo f integrabile su $D_1, \dots, D_n$, e, dato $\varepsilon > 0$, consideriamo partizioni P_i di D_i tali che

$$S(P_i) - s(P_i) < \varepsilon/n, \qquad i = 1, \dots, n.$$

È allora chiaro, analogamente alla prima parte della dimostrazione, che $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$ è una partizione di D e che

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^n S(P_i) - \sum_{i=1}^n s(P_i) < \varepsilon,$$

da cui l'integrabilità di f su D. □

Riferimenti bibliografici

[FMS] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, Liguori (1996).