Università degli Studi di Roma Tor Vergata
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Introduzione all'Analisi Funzionale
6 luglio 2010

1) Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^{4/3}([1,+\infty))$ una successione debolmente convergente ad $f \in L^{4/3}([1,+\infty))$, e siano

$$g_n(x) := \frac{n^2 \sin^2(x/n)}{x^{7/3}}, \quad g(x) := \frac{1}{x^{1/3}}, \qquad x \in [1,+\infty).$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n g_n = \int_1^{+\infty} fg.$$

2) Si consideri l'operatore $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ definito da

$$(Kf)(x) := \int_0^1 k(x,y)f(y)dy, \qquad x \in [0,1], f \in L^2([0,1]),$$

dove $k(x,y) := \max\{x-1, y-1\}$.

(i) Dimostrare che K è compatto e autoaggiunto.

(ii) Verificare che per $\lambda \neq 0$ l'equazione agli autovalori $Kf = \lambda f$ è equivalente all'equazione $Lf = \lambda^{-1} f$, dove L è l'operatore di Sturm-Liouville definito da

$$Lf := -f'',$$
$$f \in \mathcal{D} := \{f \in C^1([0,1]) \,:\, f' \in AC([0,1]),\ f'' \in L^2([0,1]), f'(0) = 0 = f(1)\}.$$

(iii) Determinare autovalori ed autovettori di K.