

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Introduzione all'Analisi Funzionale
10 giugno 2010

1) Sia $S : \ell^1(\mathbb{N}) \rightarrow c_0(\mathbb{N})$ l'operatore definito da

$$(Sx)(n) := \sum_{k=n}^{+\infty} x(k), \quad n \in \mathbb{N}, x \in \ell^1(\mathbb{N}).$$

(i) Dimostrare che S è limitato e calcolare $\|S\|$.

(ii) Determinare $S^* : \ell^1(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{N})$.

2) Si consideri l'operatore $K : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ definito da

$$(Kf)(x) := \int_0^1 k(x, y)f(y)dy, \quad x \in [0, 1], f \in L^2([0, 1]),$$

dove $k(x, y) := \min\{x, y\}$.

(i) Dimostrare che K è compatto e autoaggiunto.

(ii) Verificare che l'equazione agli autovalori $Kf = \lambda f$ è equivalente all'equazione $Lf = \lambda^{-1}f$, dove L è l'operatore di Sturm-Liouville definito da

$$Lf := -f'', \\ f \in \mathcal{D} := \{f \in C^1([0, 1]) : f' \in AC([0, 1]), f'' \in L^2([0, 1]), f(0) = 0 = f'(1)\}.$$

(iii) Determinare autovalori ed autovettori di K .